高等数学进阶

王学武 编著

清华大学出版社

高等数学进阶

王学武　编著

清 华 大 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是为考研同学提高高等数学水平而编写的，覆盖了数一和数三考研大纲的高等数学部分的全部内容。全书共 11 章，每章首先列出必须牢记、理解的基本概念，需要掌握、运用的基本结论，以及本章涉及的基本方法。然后，分节解析基本概念；简述定理、性质等基本结论；通过考研题型，给出常规的、完备的解题基本方法，并用适当例题解读方法、总结规律，给出各类题型解题方法综述；最后配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。每章安排一节对 2003—2019 年的数一和数三的高等数学部分考研真题进行分类、归纳、对比、分析，并应用本书研究的此类题型的解法处理和解决这些考研真题。为便于读者核对习题答案，各章给出了习题的答案与提示。

本书可以作为考研数学复习第一轮的辅导书，也可作为学习“数学分析”“高等数学”和“微积分”的教学参考书，还可作为理工类和经管类的“高等数学续论”或“微积分续论”课的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学进阶/王学武编著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-51919-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 287824 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：**100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购：**010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张：**27　　**字　　数：**653 千字
版　　次：2019 年 4 月第 1 版　　**印　　次：**2019 年 4 月第1 次印刷
定　　价：58.00 元

产品编号：078547-01



无以数计的高等数学教材和考研数学辅导书，使考研同学很纠结。有的选择一套教材，反复看了几遍，遇到问题还是束手无策；有的死啃考研数学全书，速度慢、效率低，又云里雾里。究其原因，大学所学高等数学好比一楼，考研高等数学好比二楼，能够从一楼顺利到达二楼，楼梯是最佳选择。为此我们想给考研学子搭建这样的阶梯，于是《高等数学进阶》应运而生。

学习高等数学，常见问题是："概念不清，结论不明，方法不多"，如果这三方面不存在问题，那么高等数学不存在问题。然而高等数学没有学好的，这三方面或多或少都存在问题，特别是解题方法。或许，你对概念、结论能够倒背如流，但是没有系统的解题方法支撑，那么你对概念的理解是肤浅的，结论的运用是生涩的。

本书在深入研究基本概念、基本结论基础上，对各类考研题型的解题方法做出全面、系统的研究、归纳、总结和综述。不夸张地说，如果能够系统地掌握这些解题方法，比较熟练地运用基本概念和基本结论，就可以从容应对各类高等数学问题。

有很多同学认为考研试题很难，其实不然！客观地说，考研试题的绝大部分都可以利用基本概念、基本结论和基本方法来解决的，只有极少题需要一些技巧或特殊方法，而且随着考研试题日臻完善，这类试题在近些年的考研试题中越来越少。所以考研复习要脚踏实地，从基础做起，注重理解和掌握基本概念、基本结论和基本方法。

本书的每章首先列出必须牢记、理解的基本概念，需要掌握、运用的基本结论，以及本章涉及的各类题型（内有对应的解题方法）；其次解析概念、简述定理、性质和结论；接下来列举了的高等数学考研题型，给出常规的、完备的解题方法，并用适当例题解读方法、总结规律；最后结合例题，给出各类题型解题方法综述。各节配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。通过适当练习，使读者不仅熟悉题型，而且还掌握解决此类题型的基本方法。

从 2003 年开始，考研数学分数从 100 分提高到 150 分，命题的模式也趋于稳定。数一和数三的高等数学（微积分）部分所占比例固定在 56%，所以本书在每章的最后一节，选择了从 2003—2019 年的 17 年的数一和数三的高等数学部分真题进行分类、归纳、对比、分析，以及应用本书研究的此类题型的解法，处理和解决这些考研真题，从而使读者加深对本书内容的理解，同时掌握了各章的考研题型、考点及深浅程度，做到知己知彼！

本书是编者近十几年来的"考研数学辅导"讲义与"高等数学续论"讲义逐步改进和完善

而成，可以用于“微积分”“高等数学”“数学分析”课程的参考书，也可以用于“高等数学进阶”或“高等数学续论”公共基础课或选修课的教材（理工类：16 周×3 课时，其中第 5 章和第 11 章可作为自学内容；经管类：16 周×3 课时，去掉第 10 章和第 11 章及带 * 号部分），同时还是考研数学复习第一轮的辅导书，尤其适合提高高等数学基础的同学，作为教材到考研复习全书的过渡。通过对解题方法的学习和课后习题的认真练习，使读者在解决问题时，有系统的、清晰的解题思路和解题方法，从而提高解题能力和解题速度。

本书是按照考研数一大纲（高等数学部分）内容编写的，但对考数二和数三的学生也是适合的，只是范围的不同而已，相同内容使用解决问题的基本方法是相同的。书中带有***的章、节以及题型等部分是数三应该掌握的内容，数一是不做要求的；同样带 * 号的部分，是数一应该掌握的内容，数三是不做要求的。

感谢山东工商学院数学学院概率统计学科和教务处混合式教学改革项目对本书出版的支持，感谢我的同事对本书提出的建设性意见，感谢我的学生们为习题解答所做的工作，感谢清华大学出版社的刘颖老师对本书所做的大量细致、重要的工作。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请读者和专家指正。

王学武

2018 年秋于烟台


目
录
CONTENTS

第 1 章

数列、函数、极限与连续

基本概念

1. 数列极限、数列收敛、数列发散；
2. 函数在一点的极限、左极限、右极限、自变量趋于无穷大时的极限；
3. 有界量、无界量；
4. 无穷小、无穷大；
5. 同阶无穷小、等价无穷小、高阶无穷小、k 阶无穷小；
6. 函数在一点连续、左连续、右连续、函数在区间上连续；
7. 间断点、第一类间断点、第二类间断点、可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点、振荡间断点；
8. 基本初等函数、初等函数。

基本结论

1. 收敛数列性质、函数极限性质、无穷小的性质；
2. 数列极限运算法则、函数极限运算法则；
3. 极限公式：两个重要极限公式、等价无穷小替换公式；
4. 一点极限存在充要条件、一点连续的充要条件；
5. 连续函数性质(和、差、积、商、复合)、初等函数的连续性、闭区间上连续函数性质；
6. 夹逼准则、单调有界原理；
7. 洛必达法则、泰勒公式；
8. 介值定理、零点定理。

基本方法

1. 计算数列极限；
2. 证明数列收敛，并求极限；
3. 计算函数极限；
4. 讨论函数的连续性、求函数的间断点、判断间断点所属类型；
5. 未知常数的确定；
6. 计算含变限积分函数的极限；

7. 计算抽象函数的极限；
8. 求无穷小的阶数和阶的比较。

1.1 数列极限的求法

一、基本概念

定义1 数列极限 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，有两种定义方法：

(1) 描述语言：当n趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限趋于固定的常数a，则称a是数列$\{x_n\}$的**极限**。

(2) ε-N语言：若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a是数列$\{x_n\}$的**极限**。

在数列极限的两种定义方法中，描述语言更有利于判断、理解一个数列极限是否存在。如数列$\{(-1)^n\}$的极限显然是不存在的，这是因为当n趋于无穷大时，数列一般项$(-1)^n$并非趋于某个固定的常数。而ε-N语言更适合于证明的表述。简言之，数列极限的描述语言有助于判断和理解数列的敛散性，而ε-N语言适合于数列敛散性的证明。

极限定义(2)表明：不论给定多么小的正数ε，都可以在数列中找到一项，从这项以后的所有项与a差的绝对值小于ε(与a的距离小于ε)，即从这项以后的所有项都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内。

通俗地说：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是随着$n$的无限增大，$|x_n-a|$可以任意小。于是有：

若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<M\varepsilon$，或$|x_n-a|\leqslant M\varepsilon$($M$是非负常数，此时$M\varepsilon$仍表示任意小)，则$a$是数列$\{x_n\}$的极限。

定义2 数列收敛和发散 如果数列极限存在，则称**数列收敛**；否则称**数列发散**。

注 根据定义1可知：数列的极限是数列一般项的变化趋势，因此数列是否收敛以及收敛哪个常数与数列(前)有限项无关。

例如，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$收敛于0，如果将数列前1000项改为：1,2,…,1000，1000项以后项不变，变化后数列为

$$1,2,\cdots,1000,\frac{1}{1001},\frac{1}{1002},\cdots,\frac{1}{n}\cdots,$$

显然这个数列仍然收敛于0。又如数列$\{n\}$是趋于无穷大，发散的。如果将此数列的前10000项改为0，变化后数列为

$$0,0,\cdots,0,10001,10002,\cdots,n,\cdots,$$

则该数列还是趋于无穷大，仍然是发散的。

二、基本结论

定理1(收敛数列性质)

(1) **唯一性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则$a=b$。

(2) **有界性** 若数列$\{x_n\}$收敛，则存在$M>0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，有$|x_n|\leqslant M$。

(3) **保号性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,有$x_n>0$;同样,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,有$x_n<0$。

反之,若$x_n<0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$a\leqslant 0$;同样,若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$a\geqslant 0$。

(4) **子数列收敛性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对$\{x_n\}$任意子数列$\{x_{n_k}\}$,有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$;反之,若数列$\{x_n\}$的偶子列$\{x_{2n}\}$和奇子列$\{x_{2n-1}\}$都收敛于常数$a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

定理 2(单调有界原理) 单调有界数列必有极限。

具体叙述为:单调增加有上界的数列必有极限;单调减少有下界的数列必有极限。

定理 3(夹逼准则) 若$\exists N\in\mathbb{N}_+$,使得$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,$n>N$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

定理 4(数列极限运算法则) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,那么:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=A^B(A>0)$。

三、基本方法

题型 1 计算数列极限

数列极限的未定式(不确定型)有八种形式:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty\pm\infty;\ 1^\infty;\ \infty^0;\ 0^0;\ 0+0+\cdots+0(n\text{ 个无穷小的和})。$$

极限是未定式(不确定型),指的是数列极限可能存在也可能不存在。对极限是无穷大的,并非是未定式(不确定型),它的极限是确定的,无穷大,不存在。

事实上,上述的∞,并没有明确是$+\infty$,还是$-\infty$,但当明确$\pm\infty$时,我们有

$$+\infty+(+\infty)=+\infty;\quad -\infty+(-\infty)=-\infty;\quad +\infty-(-\infty)=+\infty。$$

一般地,数列的一般项是关于n的代数式(函数式),极限型是

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty\pm\infty;\quad 1^\infty;\quad \infty^0;\quad 0^0,$$

通常用四个方法:**取大法**、**有理化法**、**公式法**和**转化法**计算其极限。

方法 1 取大法

所谓取大法,就是对极限型是$\dfrac{\infty}{\infty}$数列的一般项,分子和分母同除以n的最大次幂,再利用极限性质,求得数列极限的方法。

例 1.1 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{2n^2-n+1}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2+1}}$。

解 (1) 数列的极限型是$\frac{\infty}{\infty}$,而分子、分母关于 n 的最大次幂是 n^2,于是分子和分母同除以 n^2,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}。$$

(2) 数列的极限型是$\frac{\infty}{\infty}$,分子和分母关于 n 的最大次幂是 n,于是分子和分母同除以 n,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2。$$

方法2 有理化法

若分子或分母含有根式,一般要考虑分子有理化或分母有理化,或分子、分母同时有理化。通过有理化,去掉根号,从而可以确定极限型和求极限的方法。

例1.2 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+1}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$。

解 (1) 由于分母含有根式,于是分母有理化,再利用取大法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4+1})}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1-\frac{1}{n^3}}=2。$$

(2) 由于分子含有根式,于是分子有理化,再利用取大法

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}。$$

方法3 公式法

所谓公式法,就是利用两个重要极限公式和等价无穷小替换公式求极限的方法。

关于数列的两个重要极限公式的基本形式为:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1。$$

一般形式:若 $f(n)\to0(f(n)\neq0)(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}}=\mathrm{e};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin f(n)}{f(n)}=1。$$

等价无穷小的替换公式见17页。

一般地,如果极限型是 1^∞,幂指型极限,利用重要极限公式有:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)}=\lim_{n\to\infty}[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}\cdot[f(n)-1]g(n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-1]g(n)},$$

其中 $f(n)\to1,g(n)\to\infty(n\to\infty)$。

注 由于 $f(n)^{g(n)}$ 底和指数都是 n 的函数，于是称 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{g(n)}$ 为**幂指型极限**。

例 1.3 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{4n+1}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$。

解 (1) 极限型是 1^∞，利用重要极限公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)\cdot\frac{4n+1}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1}}=e^2。$$

(2) 将数列一般项中 $\sin\dfrac{1}{n}$ 凑成重要极限公式形式，然后计算其余部分极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e。$$

方法 4 转换法

转换法就是将数列极限转换成函数极限。通常情况下，取 $n=x$，则 $x\to+\infty$；取 $\dfrac{1}{n}=x$，则 $x\to0^+$；取 $\sqrt[n]{n}=x$，则 $x\to1$，等等，这是求数列极限的一个常用方法。当数列极限转换成函数极限后，对极限型为 $\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ 的极限，可以运用洛必达法则，这也是转化法的主要目的。

例 1.4 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,a,b>0$。

解 (1) 取 $\dfrac{1}{n}=x$，则 $x\to0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n(e^{\frac{2}{n}}-1)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}(e^{2x}-1)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2。$$

(2) 极限为不定式 1^∞ 型，利用重要极限公式，得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}}。$$

取 $\dfrac{1}{n}=x$，运用洛必达法则，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}=\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}。$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}。$$

注 转换法的理论依据是**海涅(Heine)定理**，即：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任意的 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

这里取$\frac{1}{n}=x$，实质是数列极限等于将$\frac{1}{n}$换成x的函数极限，其他情况雷同。

一般地，若数列的一般项是和n有关的式子而不是关于n的代数式，或表示为无限个无穷小的和，或分子、分母为无限个无穷小的和，通常用三个方法：**放缩法**、**相减法**和**积分法**计算其极限。

方法5 放缩法（夹逼准则）

若数列的一般项是与n有关的式子而不是关于n的代数式，或表示为无限个无穷小的和，通常采用放大和缩小的方法（简称放缩法），使不等式两端表示为n的代数式，进而求得不等式两端的极限，在不等式两端数列极限存在且相等情况下，根据夹逼准则，所求数列的极限存在且等于两端的极限。我们称此求极限的方法为**放缩法**，又称**夹逼准则**。

应用放缩法要注意的是：对一般项放大不能放得太大；缩小也不能缩得太小，否则两端极限不等，这对求此数列极限没有任何意义。

例1.5 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$。

解 对数列的一般项放缩

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}。$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{2}，\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}，$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$。

例1.6 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解 解此题的关键是将积分表示为关于n的代数式，显然这是没办法通过直接计算积分来实现的，只能通过对被积函数的放缩，达到可求积分的目的。由于$x\in[0,1]$，于是有

$$0\leqslant\frac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n，$$

根据定积分的保序性，有

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}。$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，根据夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$。

注 当例1.5改为计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{m}{n^2+m}\right)$时，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{m}{n^2+m}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2+m}=0。$$

这是由于它是有限个（m个）无穷小的和，我们知道：**有限个无穷小的和是无穷小**。

无限个无穷小的和是数列极限未定式的一种常见形式，也是数列极限中比较难解决的问题，计算此类极限有四个方法：**放缩法**、**积分法**、**相减法**和**级数和**。前三个方法在本节给出，级数和方法将在级数一章中处理。

方法 6 相减法

施托尔茨(Stolz)定理：若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，$y_{n+1}>y_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}。$$

如果数列的一般项为分式形式，分子或分母为 n 项(无限项)的和，可以利用施托尔茨定理，我们将这一方法形象的称为**相减法**。这一方法可以使分子或分母无穷多项变成有限项。

例 1.7 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]$。

解 令 $x_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$，$y_n=n^3$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，$y_{n+1}>y_n$。根据施托尔茨定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3n^2+3n+1}=\frac{4}{3}。$$

例 1.8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)$。

解 根据施托尔茨定理得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\text{(分子分母同除 }n^{p+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}\left(\text{取}\frac{1}{n}=x\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)^p}{(1+x)^{p+1}-1}\text{(这里}(1+x)^{p+1}-1\sim(p+1)x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)^p}{(p+1)x}=\frac{1}{p+1}。\end{aligned}$$

方法 7 积分法

所谓的积分法就是将数列极限表示为一个定积分的计算数列极限的方法。如果数列一般项为 n 项(无限项)的和或积的形式，或者为$\sum$ 和$\prod$ 的形式，可以考虑应用积分法，将数列极限表示为定积分。应用积分法的关键是确定被积函数！

积分法原理：如图 1-1，将曲边梯形分成 n 个等宽的小曲边梯形，第 $k(k=1,2,\cdots,n)$个小曲边梯形的面积近似等于长方形$\left(\text{以}\frac{1}{n}\text{为宽，以} f\left(\frac{k}{n}\right)\text{为长；或以}\frac{1}{n}\text{为宽，以} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\text{为长}\right)$的面积，根据定积分的几何意义，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

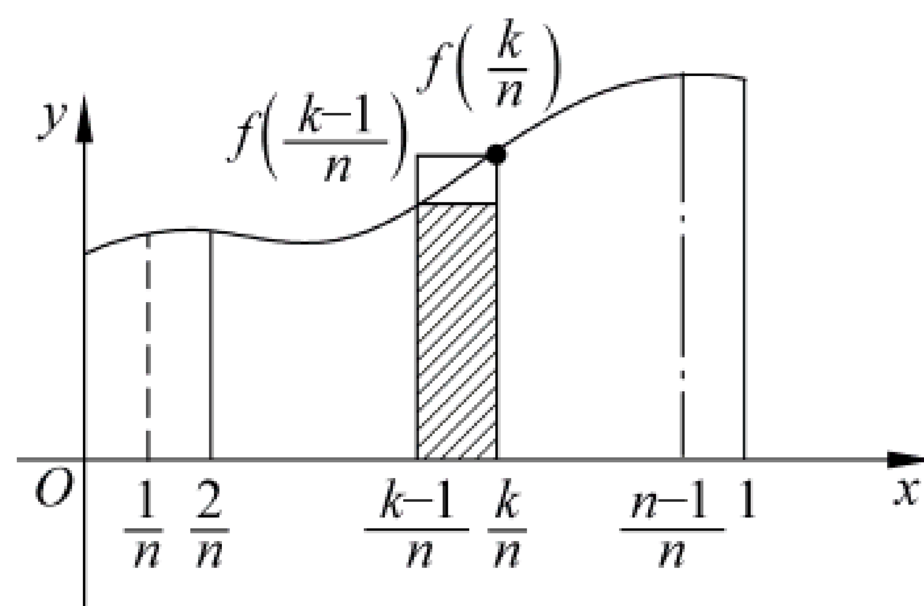


图 1-1

应用积分方法计算数列极限的具体步骤：

情形 1 数列一般项为 n 项和，或$\sum$ 的形式：

1. 将数列的一般项表示为$\sum\limits_{k=1}^{n}$?的形式；

2. 数列一般项提取$\frac{1}{n}$，将数列的一般项表示为$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}?$的形式；

3. 将$\sum\limits_{k=1}^{n}?$的一般项“?”表示成关于$\frac{k}{n}$或$\frac{k-1}{n}$的函数式；

4. 把$\frac{k}{n}$或$\frac{k-1}{n}$换成x，此时一般项“?”就是定积分的被积函数$f(x)$，数列极限就是$f(x)$在$[0,1]$上的定积分。

情形2 若数列的一般项是n项积，或$\prod$的形式，可以利用恒等变换公式$N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将积的形式化成以e为底、指数为n项和的形式，然后利用积分法求出指数部分的极限。

例1.9 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$。

解 将极限转化为定积分

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}。$$

注 此题不能应用放缩法，这是由于一般项放缩后为

$$\frac{n}{\sqrt{4n^2-1^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

不等式两端的极限不等。

例1.10 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}$。

解 首先利用恒等变换公式$N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将积的形式变成和的形式，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}[\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+(n-1))]-\ln n}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln 1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{[x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)]_0^1}=\frac{4}{\mathrm{e}}。$$

需要指出的是：并非所有的一般项为n项和的数列极限都可以转化为定积分，如果不能转化为定积分，可考虑放缩，使不等式两端的极限表示为定积分，再利用夹逼准则。

例1.11 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

解 对一般项进行放缩得到

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)。$$

不等式右端的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\int_0^1\sin x\pi\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

不等式左端的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\int_0^1\sin x\pi\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}。$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}。$$

注 例1.7和例1.8是n项(无穷多项)和的极限,所以也可以考虑用积分法。在本节中,对求n项和的极限介绍了三个方法,但需要指出的是:并非每个题都适合这三种方法,这些方法各自都有一定的局限性,在求极限时可去尝试,具体问题具体分析。

求数列极限方法综述

求数列极限有七种常用方法,分别是:取大法、有理化法、公式法、转化法、相减法、积分法、放缩法。在具体问题中,究竟用哪个方法还是比较明显的(上面已经给出阐述,这里不再赘述)。当然在不确定的情况下,可一一尝试。一般来说,总要有一个或几个方法是可行的。同时,用哪种方法,最重要的是依据数列一般项本身特点和极限型。

求极限的每一步都要判断极限是不是不确定型,如果不是不确定型,此时极限已经确定,就可以得到结果;如果是不确定型,判断是哪类不确定型,从而应用相应的方法。

题型2 证明数列收敛、并求极限

一般地,若数列的一般项是和n有关的式子但不是关于n的代数式,而是有规律地给出一般项,或是一般项的递推公式,此时需要考虑利用:**单调有界原理**和**验证法**去证明极限存在,并依据递推公式求出极限。

方法1 单调有界原理

利用单调有界原理证明数列极限存在、求数列极限,具体方法和步骤:

①证明单调;②证明有界;③通过递推公式求数列极限。

例1.12 若数列$\{a_n\}$满足$a_1>\sqrt{a}(a>0)$,$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$,证明数列极限存在,并求之。

证明 首先证明数列有下界:由于$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a}$,所以数列有下界。

其次证明数列单调递减:由于$a_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$,则有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2a_n}(a-a_n^2)\leqslant 0\Rightarrow a_{n+1}\leqslant a_n,$$

所以,数列$\{a_n\}$单调递减。根据单调有界原理,数列$\{a_n\}$极限存在。

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$,对递推公式两边取极限,有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}\frac{a}{a_n}\right),$$

于是有 $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$，解此方程得 $x=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$。

注 事实上，数列的敛散性与数列的有限项无关，所以数列$\{a_n\}$和$\{a_{n+k}\}$($k\in\mathbb{N}$)具有相同的敛散性，因此若数列$\{a_n\}$的极限存在，则数列$\{a_{n+k}\}$的极限也存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$。

例 1.13 证明数列$\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…收敛，并求其极限。

证明 令 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，则 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$。

下面用数学归纳法证明：数列$\{x_n\}$单调增加，有上界。

(1) 证明单调增加：显然 $x_2>x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}$，则 $\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}$，即 $x_{n+1}>x_n$，所以数列$\{x_n\}$单调增加。

(2) 证明有上界：$x_1\leqslant 2$，假设 $x_{n-1}\leqslant 2$，显然 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\leqslant 2$，故对所有的 n，有 $x_n\leqslant 2$，所以数列$\{x_n\}$有上界。根据单调有界原理，数列$\{x_n\}$收敛。

求极限：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$两端取极限，则有 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a=2$。

注 (1) 关于数列的界，可用观察和归纳的方法得到。如果不易直观看出，可以利用递推公式先将数列的极限求出，此极限一般就是数列的上界或下界(单调增加数列的极限就是该数列的上界，单调减少数列的极限就是该数列的下界)。

(2) 在证明数列的单调性和有界性时。如果没有更简便、有效的方法，可以考虑数学归纳法。

(3) 证明数列极限存在，并求极限题型，一般都是通过对递推公式两端取极限，建立方程，解方程得到所求极限，所以没有递推公式的，首先应该建立递推公式，如例 1.13。

方法 2 验证法

所谓验证法就是：假设数列$\{x_n\}$极限存在，根据递推公式求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，最后证明数列$\{x_n\}$收敛于 a，即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$，我们把这一方法称为**验证法**。

这一方法适合一般项是和 n 相关的式子而不是关于 n 的代数式，或通过递推公式(相应数列称为递归数列)给出的数列，这个数列可以是单调的，也可不是单调的。当然，非单调数列更适合应用验证法，或说只能用验证法。

例 1.14 设 $x_1=2$，$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$，证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限。

分析 此数列不是单调的，所以不能用单调有界原理，只能用验证法。

解 令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对递推公式两边取极限得 $a=2+\frac{1}{a}$，解得 $a=1+\sqrt{2}$。

下面证明 $a=1+\sqrt{2}$就是数列$\{x_n\}$的极限。由于 a，$x_n>2$，则

$$\begin{aligned}|x_n-a| &= \left|2+\frac{1}{x_{n-1}}-\left(2+\frac{1}{a}\right)\right| \\ &= \frac{|x_{n-1}-a|}{x_{n-1}a}\leqslant\frac{1}{4}|x_{n-1}-a|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|x_1-a|,\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^{n-1}}|x_1-a|=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=1+\sqrt{2}$。

关于验证法需要说明的是:

(1) 证明是必须的! 例如$x_1=2,x_{n+1}=2x_n+1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。事实上,该数列的极限并不存在,但是若令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则可以求出$a=-1$,这显然是一个错误的结果。所以说证明是必须的。

(2) 事实上,例1.13也可以用验证法,请读者给出证明,也就是说,以递推公式给出的数列,一般可以用验证法。

要说明的是:若证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$。在证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$时,一般是放大,得到如下形式的不等式

$$|x_n-a|\leqslant r|x_{n-1}-a|\quad(r<1),$$

递推得到

$$0\leqslant|x_n-a|\leqslant r|x_{n-1}-a|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-1}|x_1-a|\quad(r<1)。$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}r^{n-1}|x_1-a|=0$,应用夹逼准则,有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

(3) 验证法有时要好于单调有界原理。这是因为利用单调有界原理,需要证明两个结论:①单调;②有界,而有时这两个结论并非很容易证明。然而验证法只需先求出数列极限a(这是一个很容易解决的问题,况且也是必须解决的问题),再证明有下面式子成立

$$|x_n-a|\leqslant r|x_{n-1}-a|\quad(r<1),$$

即一般项与极限做差,放大即可。

(4) 在例1.14中,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$,采用推导$|x_n-a|\leqslant\frac{1}{4}|x_{n-1}-a|$,而不是推导$|x_n-(1+\sqrt{2})|\leqslant\frac{1}{4}|x_{n-1}-(1+\sqrt{2})|$,这是由于$a$仍保留原来的特性:$a=2+\frac{1}{a}$,它在推导所需结论中是十分重要的,而$1+\sqrt{2}$却很难发现有这样性质,这是此方法的一个技巧!

证明数列收敛、并求极限方法综述

证明数列收敛有两个方法:单调有界原理和验证法。用这两种方法的题型最大特点是:证明数列收敛,且数列的一般项是和n有关的式子而不是关于n代数式,或给出数列一般项表示或递推关系。因此若遇到这样的类似问题,应该考虑应用单调有界原理和验证法。

在证明数列收敛时,究竟是应用单调有界原理,还是应用验证法,一般规律是:对单调数列而言,既可以用单调有界原理,也可以用验证法;对非单调数列而言,只能用验证法。

对证明极限存在并求极限这类问题,其中证明极限存在可能有多种方法,但就求极限的方法而言,是固定的,即对递推公式两端求极限。因此如果没有给出递推公式或关系,需要求出递推关系,如例1.13。

当然,对有些数列,尽管一般项不是关于n的代数式,但可以从递推关系中求出一般项,将其表示为n的代数式形式,再用常规方法解决极限问题。这一方法在本节不再论述。

证明(判断)数列发散,是一个比较简单的问题,根据子数列的收敛性,只要找到这个数列的一个子数列的极限不存在,或两个子数列,它们的极限不等就证明该数列发散。

例如：数列$\{(-1)^n\}$的偶子列$\{(-1)^{2n}\}$收敛于1，奇子列$\{(-1)^{2n-1}\}$收敛于-1，所以数列$\{(-1)^n\}$发散。

练习题 1-1

1. 用取大法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{5n^3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3-n^2+2}}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^3-n^3}{(1+2n)^2-3n^2}$。

2. 用有理化法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^3})$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{n^3(n+1)}-n^2}$。

3. 用放缩法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$。

4. 用相减法(施托尔茨定理)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$。

5. 用转化法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$。

6. 用积分法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{1}{n}\pi+\sin\dfrac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\dfrac{n}{n}\pi\right)$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}\ (b>1)$。

7. 用公式法(重要极限公式、等价无穷小替换公式)和转化法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+n-3}\right)^{n+1}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\sin^2\dfrac{1}{n}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})$。

8. 分别用单调有界原理和验证法证明：设 $x_1=10$，$x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$，$n=1,2,\cdots$，则数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

9. 数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=0$，$x_n=\frac{1}{4}(x_{n-1}+3)$，$n=2,3,\cdots$，试证：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

10. 数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_0=1$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，试证：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

11. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$n=1,2,\cdots$，试证：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

12. 证明：

(1) $\ln(1+n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}=1$。

1.2　函数极限的求法

一、基本概念

定义 3　函数极限分两类：

(1) 自变量趋于一点的极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；

(2) 自变量趋于无穷大的极限：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 有两种定义方法：

(1) 描述语言：当 x 趋于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋于固定常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的**极限**，或称 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 的过程中极限是 A。

(2) ε-δ 语言：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的**极限**。

事实上，下列集合是相等的：

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x:0<|x_0-x|<\delta\}=\mathring{U}(x_0,\delta),$$

于是 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 还可用 $x:0<|x_0-x|<\delta$ 或 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 来表示。

注　关于函数极限需要说明的是：

函数在一点的极限，是 x 趋于 x_0 过程中(但不等于 x_0)，函数值的变化趋势，于是函数在一点的极限，与函数在该点是否有定义，以及函数值大小无关，所以仅仅要求在 x_0 的某个空心邻域，即 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 的自变量 x 满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$。至于 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 是否满足这个不等式和极限没有任何关系！

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 有两种定义方法：

(1) 描述语言：当 $|x|$ 趋于无穷大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋于固定常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的**极限**，或称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中极限是 A。

(2) ε-X 语言：若$\forall \varepsilon>0,\exists X>0,\forall |x|>X$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$在 $x\to\infty$时的**极限**。

定义 4 单侧极限

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$;或 $f(x_0^-)=A$ 有两种定义方法：

(1) 描述语言：当 x 从 x_0 左侧($x<x_0$)趋于 x_0 时,函数值 $f(x)$无限趋近于固定常数 A,则称 A 是 $f(x)$在点 x_0 的**左极限**。

(2) ε-δ 语言：若$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$在点 x_0 的**左极限**。

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$;或 $f(x_0^+)=A$ 有两种定义方法：

(1) 描述语言：当 x 从 x_0 右侧($x_0<x$)趋于 x_0 时,函数值 $f(x)$无限趋于固定常数 A,则称 A 是 $f(x)$在点 x_0 的**右极限**。

(2) ε-δ 语言：若$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$在点 x_0 的**右极限**。

注 关于函数极限与单侧极限需要说明的是：

对于极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,如果 $f(x)$在点 x_0 左右的表达式不同,只能求函数 $f(x)$在点 x_0 的左极限和右极限,通过左右极限情况确定此点极限的存在性和极限值。

例如：讨论分段函数在分段点的极限,只有当函数在这点的左极限和右极限都存在,且相等时,才能说$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在并等于单侧极限,否则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在。

特别地,当直接求这点的极限无法确定的情况下,同样需要求左极限和右极限。

例如：讨论极限$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$存在性,由于$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}$,而 e^{∞}是不确定的,这是由于 $e^{+\infty}=+\infty$,$e^{-\infty}=0$。所以只能分别求出 0 点的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$和右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$。

定义 5 无穷小和无穷大：

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,则称在 $x\to x_0$ 过程中,$f(x)$是**无穷小量**；

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$,则称在 $x\to x_0$ 过程中,$f(x)$是**无穷大量**。

注 需要指出的是：无穷小和无穷大都是变量,并**规定**：仅常数 0 是无穷小。另外,称 $f(x)$是无穷大量或无穷小量一定附有条件的,必须指明自变量 x 在何变化过程。这是因为在不同的变化过程中,$f(x)$的变化可能是不同的。

例如函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$,仅当 $x\to 1$ 时是无穷小量;仅当 $x\to 2$ 时是无穷大量。

定义 6 无穷小的比较(阶)

设在 $x\to\Delta$ 过程中,$\alpha(x)$和 $\beta(x)$都是无穷小,即$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\Delta}\beta(x)=0$：

(1) **同阶无穷小** 若$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)/\beta(x)=C(C\neq 0)$,则称 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$是同阶无穷小,记为

$$\alpha(x)=O[\beta(x)];$$

(2) **等价无穷小** 若$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)/\beta(x)=1$,则称 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$是等价无穷小,记为

$$\alpha(x)\sim\beta(x);$$

(3) **高阶无穷小** 若$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)/\beta(x)=0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小，记为

$$\alpha(x)=o[\beta(x)];$$

(4) **k 阶无穷小** 若$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)/\beta^k(x)=C(C\neq0)$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小。

注 在$x\to\Delta$中的Δ可能是一点，也可能是无穷大，以后也是如此！

二、基本结论

定理 5(函数极限性质)

(1) **唯一性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则$A=B$；

(2) **局部有界性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\exists M,\delta>0$，使$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有$|f(x)|\leqslant M$；

(3) **局部保号性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则$\exists\delta>0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有$f(x)>0$；同样，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$，则$\exists\delta>0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有$f(x)<0$。

注 这里之所以说局部有界性和局部保号性，是因为这种有界性和保号性并非是在函数的定义域上，而是在点x_0的某个空心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内。

定理 6(极限存在充要条件) 函数在一点极限存在$\Leftrightarrow$这点的左、右极限都存在且相等。即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\text{ 存在}\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)。$$

判断分段函数在分段点的极限是否存在，一般是求出这点的左极限和右极限，根据定理6，若二者相等，则分段点的极限存在。

定理 7(夹逼准则) 若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$x\in\mathring{U}(x_0)$且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A。$$

定理 8(函数极限运算法则) 设$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=B$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=AB$；

(3) $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)}{\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)}=A^B(A>0)$。

定理 9(两个重要极限) **两个基本公式** $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

这两个极限公式推广形式：若$f(x)\to0(f(x)\neq0)(x\to\Delta)$，则

$$\lim_{x\to\Delta}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e};\quad\lim_{x\to\Delta}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1。$$

定理 10(函数极限运算性质)

(1) 无穷小与有界函数的积是无穷小，即若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，$|g(x)|\leqslant M$，则

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)g(x)=0;$$

(2) 等价无穷小替换原理：当$x\to\Delta$时，若$\alpha(x)\sim\alpha_0(x)$，$\beta(x)\sim\beta_0(x)$，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_0(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta_0(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)};$$

(3) 洛必达法则：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同时趋于 0 或无穷大，且 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大，则

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad 或无穷大。$$

注 从替换原理可以看出：替换部分是函数的分子或函数的分母，或与函数的分子或分母是积的形式。在替换过程中，既可以单独替换分子，又可以单独替换分母，又可分子、分母同时替换。

定理 11(极限和无穷小关系) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

注 这个结论是十分重要的，它是将一个抽象函数具体化的有效方法。

定理 12(无穷小的性质)

(1) 有限个无穷小的和是无穷小；

(2) 有限个无穷小的积是无穷小；

(3) 无穷小与有界函数的积是无穷小；

(4) 无穷小的运算性质：当 $x\to 0$ 时，α,β 是两个任意常数，$k,m>0$，

① $\alpha\cdot o(x^k)\pm\beta\cdot o(x^k)=o(x^k)$； ② $x^m\cdot o(x^k)=o(x^{k+m})$；

③ $o(x^k)/x^m=o(x^{k-m})(k>m)$； ④ $o(x^m)+o(x^k)=o(x^n)$，其中 $n=\min\{m,k\}$。

定理 13(无穷小与无穷大的关系)

在同一个变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 一定是无穷小量，反之不成立。然而，若 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大量。

定理 14 带有佩亚诺余项的泰勒公式

如果函数 $f(x)$ 在某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数，则对任意的 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

其中 $x\to x_0$。

特别地，当 $x\to 0$ 时，有公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)。$$

这个公式被称为**带有佩亚诺余项的麦克劳林公式**，这也是在求一些复杂函数极限、无穷小阶以及阶的比较时常用的公式。它的最大作用是将函数表示为含有 $o(x^n)$ 项的关于 x 的多项式。

三、基本思想

函数极限有七种的未定式(不确定型)，分别是：

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty\pm\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^0;\quad 0^0。$$

（一）求函数极限的基本思想

1. 对于$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，可以运用替换、先算、有理化、洛必达法则；

2. 对于 $0\cdot\infty$型的极限可以转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型；

3. 对于$\infty\pm\infty$型可以通过通分、有理化、倒变换，化成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$形式；

4. 对于 1^{∞}，利用重要极限公式$\lim\limits_{x\to\Delta}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$，其中 $f(x)\to 0(x\to\Delta)$。

当 $x\to\Delta$ 时，若 $u(x)\to 1, v(x)\to\infty$，则

$$\lim_{x\to\Delta}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to\Delta}[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}\cdot[u(x)-1]v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\Delta}[u(x)-1]v(x)}。$$

5. 对于 $0^0, \infty^0$ 或 1^{∞}，利用恒等变形公式 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将极限化为

$$0^0=\mathrm{e}^{0\ln 0}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty},\ \infty^0=\mathrm{e}^{0\ln\infty}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty},1^{\infty}=\mathrm{e}^{\infty\ln 1}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty},$$

然后求指数部分的极限，即

$$\lim_{x\to\Delta}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\Delta}v(x)\ln u(x)}。$$

大致地说，计算幂指函数的极限：$1^{\infty}, \infty^0$ 和 0^0，可用 e 抬起，再求指数部分极限。

（二）简化函数极限的两个方法：替换、先算

方法 1 替换 在计算函数极限的过程中，函数或函数的分子或分母常常出现极限为零的因子，即无穷小，要充分运用等价无穷小替换，简称为**替换**，使极限呈现出简单的形式。

常用的等价无穷小替换基本公式：当 $x\to 0$ 时

1. $\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$；

2. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；

3. $a^x-1\sim x\ln a, \mathrm{e}^x-1\sim x$；

4. $\ln(1+x)\sim x$；

5. $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$。

关于等价无穷小替换公式的几点说明：

(1) 一般地，若 $f(x)\to 0(f(x)\neq 0)$，则上述五组公式的 x 可以换成 $f(x)$。例如

$$\sin f(x)\sim f(x);\quad [1+f(x)]^{\alpha}-1\sim\alpha f(x)。$$

(2) 利用等价无穷小进行替换，其替换部分与函数，或与函数的分子或分母一定是积的形式。

(3) 与分子或分母的其余部分是和与差的形式是不能替换的。例如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$是不能将 $\tan x$ 或 $\sin x$ 分别替换为 x，这是因为 $\tan x$、$\sin x$ 与分子不是积的形式。

方法 2 先算 在计算函数极限的过程中，函数或函数的分子或分母常常出现非零极限因子，利用极限性质（积或商的极限就等于极限的积或商），把它先计算出来，简称为**先算**，但先算部分必须满足两个条件：

(1)与函数，或与函数的分子或分母是积的形式；(2)极限不等于零。

例如，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$，由于 $1-\cos x$ 是分子，所以可用$\frac{1}{2}x^2$ 替换，而 $1+\cos x$ 是分

母的一个因子，且$\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$，非零，可以先算，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cdot 2}=\frac{1}{4}。$$

例如：下面的计算都是**错误**的！

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}}{x}=0。$$

第一个运算是利用等价无穷小的替换性质，将 $\sin x$ 替换为 x，但由于 $\sin x$ 与分子不是积的形式，所以这样计算是错误的；第二个运算是利用先算性质，即先计算$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，但是由于$(1+x)^{\frac{1}{x}}$与分子也不是积的形式，所以这样计算也是错误的。

总之，不论是替换还是先算，这部分与函数，或与函数的分子或分母一定是积的形式，而且先算部分极限必须是非零的。

四、基本方法

题型 3 计算函数极限

计算函数极限的方法有：

方法 1 有理化、恒等变形、变量替换

(1) 当极限含有根式时，可考虑分子或分母有理化，经过有理化运算后，去掉根号，消去相同项；

(2) 常将幂指函数、指数函数做恒等变换，即 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将这类函数转化为以 e 为底的指数函数，或转化成等价无穷小替换公式 $\mathrm{e}^x-1\sim x$ 的形式；

(3) 当极限表示为同一个“函数”为变量时，作变量替换，从而简化极限。

方法 2 洛必达法则

当极限型是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$时，就可以运用洛必达法则，并且可以连续多次使用，只要是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$。但需要注意的是，应用洛必达法则前，采用替换，先算的方法，尽可能将极限化成比较简单的形式，确保运用洛必达法则后，有更简单、明确的极限形式。

方法 3 公式法

计算函数极限时，可考虑运用两个重要极限公式和等价无穷小的替换公式。特别是等价无穷小替换公式在求极限时起到十分重要的作用。

方法 4 放缩法

当极限型不明确时，可考虑放缩，使不等式两端的极限有明确的极限形式，再求不等式两端的极限，若不等式两端的极限相等，根据夹逼准则，得到所求函数极限。

方法 5 泰勒公式

当极限或变化后极限为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$时，若应用洛必达法则变得更加复杂，其他方法又不适合的情况下，可考虑利用泰勒公式，将函数展成带有佩亚诺余项的关于 x 的多项式，再求极限。

常用函数的带有佩亚诺余项的泰勒公式：当 $x\to 0$ 时，

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)；$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)。$$

例 1.15 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2}$。

解 (1) 当 $x\to a$ 时，极限是$\frac{0}{0}$型，运用洛必达法则，得到

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos x = \cos a。$$

(2) 当 $x\to\infty$时，此极限是无穷小与有界函数的积，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin 2x = 0。$$

(3) 当 $x\to\infty$时，此极限是$\frac{\infty}{\infty}$，但不能用洛必达法则(分子与分母导数比的极限不存在，也不是无穷大)，只能改用它法，拆分得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 1-0 = 1。$$

(4) 当 $x\to 0$ 时，并非是不确定型，而是无穷大与非零极限的积，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(1+\cos x) = \infty。$$

注 计算函数极限要注意两个问题：

(1) 自变量的变化趋势；(2) 判断极限型。

求极限的每一步都需判断极限型，若是不确定型，需判断是哪类不确定型，进而采用相应的方法。同时，在运用洛必达法则之前，一定要检验是否是$\frac{0}{0}$型，或$\frac{\infty}{\infty}$型，不然不要用洛必达法则的。

例 1.16 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$。

解 (1)【方法 1】极限中含有根式，分子有理化

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1。$$

【方法 2】极限是$\frac{0}{0}$型，应用洛必达法则，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)=1。$$

【方法 3】分子提取$\sqrt{1-x}$，将分子化成等价无穷小替换公式$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$的形式，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)}{x}（先算\sqrt{1-x}的极限）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1-x}}{x}=1。$$

【方法 4】添加项，拆分，将分子化成等价无穷小替换公式$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$的形式，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1+1-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-x)}{x}=1。$$

(2) 分子提取$e^{\sin x}$，将分子化成等价替换公式$e^x-1\sim x$形式，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x^3}（先计算e^{\sin x}的极限）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}。$$

(3)【方法 1】将幂指函数x^x作恒等变换，化为指数函数，即$x^x-1=e^{x\ln x}-1$，从而化成等价替换公式$e^x-1\sim x$形式，因此有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1。$$

【方法 2】将极限变形，有$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x^x}$，变量表示为$x^x$，于是作变量替换，令$x^x=t$，显然当$x\to 1$时，$t\to 1$。从而有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x^x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}=1。$$

【方法 3】运用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)}{1+\ln x}=\lim_{x\to 1}x^x=1。$$

(4)【方法 1】分子和分母分别提取b^{x^2}和b^x，将其化成等价替换公式$a^x-1\sim x\ln a$的形

式，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{b^{x^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\right]}{b^{2x}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x}-1\right]^2}\text{（先计算 } b^{2x},b^{x^2}\text{ 的极限）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x}-1\right]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2[\ln a-\ln b]}{x^2[\ln a-\ln b]^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}。$$

【方法 2】作恒等变换，变成以 e 为底的指数函数，提取，最后化成等价替换公式 $e^x-1\sim x$ 的形式，从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln a}-e^{x^2\ln b}}{(e^{x\ln a}-e^{x\ln b})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln b}(e^{x^2(\ln a-\ln b)}-1)}{e^{2x\ln b}(e^{x(\ln a-\ln b)}-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2(\ln a-\ln b)}-1}{(e^{x(\ln a-\ln b)}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\ln a-\ln b)}{[x(\ln a-\ln b)]^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}。$$

注 例 1.16(1)的【方法 1】和【方法 2】是比较简单的，之所以提到【方法 3】，是因为有些有理化过于复杂。例如对 $\sqrt[4]{1+x^4}-\sqrt[3]{1+x^3}$ 有理化是不可想象的，但若经过提取，将其转化成等价替换公式 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 的形式，处理起来将变得简单些。例如：

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[4]{1+x^4}-\sqrt[3]{1+x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\left(\sqrt[12]{\frac{(1+x^4)^3}{(1+x^3)^4}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\left(\sqrt[12]{1+\frac{(1+x^4)^3}{(1+x^3)^4}-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to\infty}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\left[\frac{(1+x^4)^3}{(1+x^3)^4}-1\right]$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to\infty}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\frac{-4x^3+3x^4-6x^6+8x^8-4x^9}{(1+x^3)^4}=-\frac{1}{3}。$$

诚然，此题可用泰勒公式法！鉴于此部分是研究有理化方法，所以这里就不再给出用泰勒公式求此极限，有兴趣的读者自己去完成。

例 1.17 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$。

解 分子有理化，分母提取 x，并作等价无穷小替换，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}。$$

例 1.18 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$。

解 对 $\ln(1+x)$ 利用等价无穷小替换，对 $1+\cos x$ 的极限先算，再拆分(利用和的极限等于极限的和)，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}。$$

两个函数和或差的极限的运算性质

(1) 根据极限的运算性质可知：两个函数的极限都存在，则它们的和或差的极限一定存在，其极限就等于两个极限的和或差。

(2) 若两个函数的极限一个存在，另一个不存在，则它们的和或差的极限一定不存在。

(3) 若两个函数的极限都不存在，则它们的和或差的极限不确定，可能存在也可能不存在。

(4) 在求极限时，将一个极限表示为两个极限的和或差(拆分)，是常用的方法。如果函数表示为两个函数的和或差，能够确保一个函数的极限存在的，就可以拆分，若另一个函数极限存在，整体极限存在，等于它们极限的和或差；若不存在，则整体极限不存在。

当然，如果两部分极限都不存在，就不要拆分。例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 就不能拆分，这是因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$ 都不存在。

例 1.19 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$。

解 极限是 0^0 型，做恒等变换，用 e 抬起，化为以 e 为底的指数函数的极限，从而转化为求指数部分的极限。利用函数极限性质(4)和替换公式 $\sin x\sim x$，得到

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}=1。$$

例 1.20 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$。

解 极限是 1^∞ 型：

【方法 1】利用重要极限公式，有

$$\lim_{x\to 0}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{e^x\sin^2 x}\cdot\frac{e^x\sin^2 x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin^2 x}{1-\cos x}}=e^2。$$

【方法 2】利用恒等变换 $N=e^{\ln N}$，用 e 抬起，化为以 e 为底的指数函数的极限

$$\lim_{x\to 0}[1+e^x\sin^2 x]^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln(1+e^x\sin^2 x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x\sin^2 x)}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2e^x\sin^2 x}{x^2}}=e^2。$$

注 计算 1^∞ 型极限，可采用两个方法，一是利用重要极限公式；二是恒等变换，这两者没有本质差别，但相对来说前者更容易些。但无论哪种方法其目的都是将所求幂指型极限最终转化为以为 e 底的指数函数的极限。

例 1.21 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$。

解 极限是 $\infty-\infty$ 型，将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。做倒变换，令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}。$$

例 1.22 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arcsin x}$。

解 将幂指函数经过恒等变形，化成指数函数，提取，再将分子化成等价无穷小替换公式 $e^x-1\sim x$ 和 $\ln(1+x)\sim x$ 的形式，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arcsin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\sin x}(e^{x\ln x-x\ln\sin x}-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-x\ln\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sin x}-1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}。$$

注 在上述例题的解题过程中，对想法和做法给予详细的说明，事实上这是不必要的。在具体解题过程中，直接计算即可，是没有必要说明的，这里之所以这样做，主要是因为想明确求极限的基本思想和方法，这样有利于读者的阅读理解。

例 1.23 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 t^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 是$[0,1]$上的连续函数。

解 由于 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，所以 $f(x)$在$[0,1]$上有界，即存在 $M>0$，使得 $\forall x\in[0,1]$，有$|f(x)|\leqslant M$。根据积分性质有

$$0\leqslant\left|\int_0^1 t^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|t^x f(t)|\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^1 t^x\mathrm{d}t=\frac{M}{x+1},$$

而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M}{x+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 t^x f(t)\mathrm{d}t=0$。

例 1.24 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1-x^2)+6(x-\sin x)}{x^5}$。

分析 此题极限是$\dfrac{0}{0}$型，如果用洛必达法则，或许是可以的。但连续用五次洛必达法则，计算量太大，更何况分子的导数越来越麻烦，以至于无法计算下去，于是考虑使用泰勒公式。

解 将函数展成带有佩亚诺余项的关于 x 的泰勒公式

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4),\quad 于是\ x\ln(1-x^2)=-x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5);$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5),\quad 于是\ 6(x-\sin x)=x^3-\frac{1}{20}x^5+o(x^5)。$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1-x^2)+6(x-\sin x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[-x^3-\dfrac{1}{2}x^5+o(x^5)\right]+\left[x^3-\dfrac{1}{20}x^5+o(x^5)\right]}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{20}x^5+o(x^5)}{x^5}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=-\frac{11}{20}。$$

关于函数展成几阶泰勒公式的说明

在计算极限时，利用泰勒公式将函数展成带有佩亚诺余项的关于 x 的泰勒公式，应该展成几阶泰勒公式，即展到哪项为止，是由展开项对极限是否有影响决定的。如果此项对极限没有影响，而前一项有影响，那就应该展到前一项为止，而且余项不影响极限值！

在例1.24中，分子的 $\sin x$ 展到 x^5 为止，而 $\ln(1-x^2)$ 展到 x^4 为止，这是由于

$$x\ln(1-x^2)+6(x-\sin x)=-\frac{11}{20}x^5+o(x^5),$$

当 $x\to0$ 时，极限是由 $-\frac{11}{20}x^5$ 决定的，与 $o(x^5)$ 无关（不影响极限值）；如果 $\sin x$ 展到 x^7，而 $\ln(1-x^2)$ 展到 x^6 为止，则有

$$x\ln(1-x^2)+6(x-\sin x)=-\frac{11}{20}x^5-\frac{279}{840}x^7+o(x^7),$$

此时极限仍是由 $-\frac{11}{20}x^5$ 决定的，与 $-\frac{279}{840}x^7+o(x^7)$ 无关（不影响极限值），所以各自多展一项是没有任何意义的。

如用泰勒公式计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$。函数 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式是

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n),$$

由于分母是 x，所以将 $\ln(1+x)$ 写成一阶泰勒公式就可以了，即 $\ln(1+x)=x+o(x)$，从而有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x)}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}=1。$$

如果将函数 $\ln(1+x)$ 写成二阶泰勒公式，即 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，从而得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}=1+\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}x\right)+\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x}=1。$$

多展的一项与分母 x 商的极限是0，不影响极限，所以多展的一项是没有任何意义的，于是 $\ln(1+x)$ 展到一阶为止！

又如求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\tan^2x(\cos x-e^{x^2})}$。根据

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$

$\sqrt{1+x^2}$ 的泰勒展开式是

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6+\cdots+o(x^{2n}),$$

如果展成一阶泰勒公式，即

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

则有 $1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}=o(x^2)$，显然分子极限与余项 $o(x^2)$ 有关，所以展到一阶是不够的，因此应该至少展到二阶，即

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4),$$

则有 $1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}=-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，显然分子的极限是由 $-\frac{1}{8}x^4$ 决定的，与余项 $o(x^4)$ 无关。所以将 $\sqrt{1+x^2}$ 展成二阶泰勒公式就可以了，自然不必展成三阶的。

例 1.25 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定 a 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，并求此极限。

解 当 $x\to 0^+$ 时，$[x]=0$；当 $x\to 0^-$ 时，$[x]=-1$，所以应分别求 $x\to 0^+$ 和 $x\to 0^-$ 时的单侧极限。由于

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)=-a+\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=-a+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=-a;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^{t})}=2。$$

所以 $a=-2$，且极限值是 2。

计算函数极限方法综述

计算函数极限，首先确定变量的变化趋势，其次确定极限型。

情形 1 确定极限型

(1) 若极限是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型：不要急于应用洛必达法则，而是考虑简化极限，替换、先算、有理化、变量代换等，使其极限有更加简单的形式，然后再利用洛必达法则（如果有必要）。

(2) 若极限 $0\cdot\infty$ 或 $\infty\pm\infty$ 型：可以通过适当变换，使其变成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

(3) 若极限是 1^∞ 型：利用重要极限公式，于是

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to\Delta}\{1+[f(x)-1]\}^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-1]g(x)},$$

其中 $f(x)\to 1, g(x)\to\infty\ (x\to\Delta)$。

(4) 若极限是 $1^\infty, 0^0$ 或 ∞^0 型：幂指型极限，应用恒等变换公式 $N=e^{\ln N}$，用 e 抬起，变成以 e 为底的指数函数（外函数），再求指数部分的极限：

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)\ln f(x)}。$$

(5) 当极限或变化后极限为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 时，应用洛必达法则变得更加复杂，其他方法又不适合，考虑利用泰勒公式，将函数展开带有佩亚诺余项的关于 x 多项式，再求极限。

情形 2 无法确定极限型

如果函数极限无法确定极限型，通常利用放缩法，放大和缩小，使不等式两端有明确的极限型，再求不等式两端的极限。当然，放大和缩小的目的是便于求不等式两端的极限，同

时，放大不要放得过大，缩小也不用缩得过小，否则不等式两端极限不等，对求此函数极限是没有任何意义的。

情形 3 无定义点、分段函数的分段点的极限

当遇到无定义的点的极限无法确定，或分段函数的分段点的极限，往往考虑求这点的左极限和右极限，以此确定这点的极限。

练习题 1-2

1. 计算下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-5x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^a x}{x^2}(a>0)$；

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$；

(12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

(14) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$；

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$；

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

(17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x-x\cos x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{(e+x)^x-e^x}$；

(19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}+x^3\sin\dfrac{1}{x}-1}{x\sin x}$；

(20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 3x}$。

2. 利用变量替换法计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x^3}$。

3. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{(1-\cos x)[x+\ln(1-x)]}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\ln(1+x^2)(\cos x-e^{x^2})}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$。

4. 利用夹逼准则计算下列极限：

(1) 求$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]$$\left(\left[\dfrac{2}{x}\right]\text{表示不超过}\dfrac{2}{x}\text{的最大整数}\right)$；

(2) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}dt$；

(3) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x |\sin t|dt}{x}$；

(4) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$，其中$f(x)$是有界函数。

5. 利用单侧极限，求下列函数一点的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}\right)$。

1.3 函数的连续性

一、基本概念

定义 7 函数在一点连续有两种定义方法：

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$ **连续**，x_0是函数$f(x)$的**连续点**。

(2) 设$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，则称$f(x)$在点$x_0$ **连续**。

定义 8 若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$ **左连续**，x_0是函数$f(x)$的**左连续点**；若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$ **右连续**，x_0是函数$f(x)$的**右连续点**。

定义 9 间断点 函数的不连续点都称为**间断点**。

注 函数$f(x)$在点x_0连续需要满足三个条件：

①$f(x)$在x_0有定义；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；③极限值等于函数值$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

若函数在这点不满足任何一条，该点就是间断点。也就是说：没定义的点一定是间断点；极限不存在的点也是间断点；极限存在但不等于函数值的点还是间断点。

定义 10 间断点分类：

(1) **第一类间断点**：左右极限都存在的间断点，称为**第一类间断点**；

(2) **第二类间断点**：左右极限至少有一个不存在的间断点，称为**第二类间断点**。

间断点分类
- 第一类间断点
  - 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$，或无定义
  - 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$
- 第二类间断点
  - 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个是无穷大
  - 振荡间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$因振荡不存在

定义 11 在区间上连续 如果函数在区间内的每一点都连续，若区间包括端点，左端点右连续，右端点左连续，则称**函数在区间上连续**。

定义 12 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**；基本

初等函数经过有限次的四则运算、复合运算得到的，可用一个式子表示的函数称为**初等函数**。

二、基本结论

定理15（连续的充要条件） 函数在一点连续⇔函数在这点既是左连续又是右连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{且} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)。$$

定理16（连续函数性质） 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商（分母函数值不为零）和复合函数在点 x_0 都连续。

定理17（初等函数连续性） 一切初等函数在定义域内的区间上都是连续的。

事实上，在很多情况下，我们判断函数是否连续，都是以定理17为依据的。例如函数

$$f(x) = \sin^2(e^x + \ln x + \arctan x)$$

在点 $x=1$ 是连续的，这是因为 $f(x)$ 是初等函数，$x=1$ 是定义域内的点；同样 $f(x)$ 在区间 $[1,100]$ 上是连续的，这是由于 $f(x)$ 是初等函数，$[1,100]$ 是定义域内的区间。

常见的非初等函数：符号函数，最大值和最小值函数，取整函数，小数函数等。

注 事实上，绝大多数分段函数都是非初等函数，只有极个别的分段函数是初等函数，例如

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是分段函数，此函数还可以写出 $f(x)=\sqrt{x^2}$，显然是初等函数。

为方便起见，我们并不鉴别分段函数是不是初等函数，都不加区别的看作非初等函数，因此以后所说的非初等函数包括分段函数，这对研究函数性质比较方便。

定理18（闭区间连续函数性质）

(1) **有界性** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$；

(2) **最值性** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值和最小值；

(3) **介值性** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对任意的 μ：$m\leqslant\mu\leqslant M$，$\exists c\in[a,b]$，使得 $f(c)=\mu$。

定理19（零点定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

推论1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)\leqslant 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

推论2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若存在 $a,b\in I$，有 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

三、基本方法

题型4 讨论函数的连续性、求函数的间断点、判断间断点所属类型

1. 讨论函数的连续性：

讨论函数的连续性，需要做如下工作：

①求出间断点，并指出所属类型；②指出连续区间。

2. 求间断点具体方法：

(1) 无定义点一定是间断点，是哪类间断点需要通过求这点的极限，或左右极限来确定。

(2) 分段函数的分段点(分界点)可能是间断点。分段点是否为间断点，以及是哪类间断点，同样需要通过求这点的极限或左右极限来确定。

通过上面阐述可知，不论是讨论连续性，还是求函数的间断点，都是先找到函数的**两类点：无定义点；分段函数的分段点**，然后求这两类点的极限。通过这些点的极限断定无定义的点是哪类间断点；分段点是否是间断点，若是间断点，是哪类间断点。

例 1.26 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x+1}}, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f(x)$的间断点，并指出间断点所属类型。

解 一个分段点 $x=0$，一个无定义的点 $x=-1$。由于

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0;\qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x+1}}=e;$$

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}e^{\frac{1}{x+1}}=\infty。$$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 的左右极限都存在但不相等，是跳跃间断点，或称第一类间断点。$x=-1$ 是无穷间断点，或称第二类间断点。

注 e^{∞} 并非等于∞，这是因为 e^{∞} 中的∞没有明确是$+\infty$，还是$-\infty$，如果确定是$+\infty$，则 $e^{+\infty}=+\infty$；如果确定是$-\infty$，则 $e^{-\infty}=0$。尽管 $x=-1$ 不是分段点，但由于该点的左右极限不同，所以求该点极限只能分别求左极限和右极限。

例 1.27 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$的连续性，若有间断点，指出间断点类型。

解 当$|x|<1$ 时，$f(x)=1$；当$|x|>1$ 时，$f(x)=-x$；当 $x=1$ 时，$f(x)=0$；当 $x=-1$ 时，$f(x)=1$，所以函数 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x<-1,\\ 1, & x=-1,\\ 1, & -1<x<1,\\ 0, & x=1,\\ -x, & 1<x<+\infty。\end{cases}$$

$f(x)$是分段函数，分段点为 $x=-1$ 和 $x=1$。由于

$$f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1,\quad f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}1=1;$$

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}1=1,\quad f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x)=-1。$$

所以 $x=-1$ 是连续点，$x=1$ 是跳跃间断点，函数 $f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$上连续。

注 讨论函数的连续性，对用极限形式表示函数的函数，其关键是根据变量 x 的不同取值范围，确定极限值，从而确定函数的表达式。也就是说，**讨论函数的连续性，求出函数的表达式是必须的！**

例 1.28 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点，并指出间断点类型。

解 无定义点：

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}$，由 $\sin \pi x=0$ 得到 $x=-1,-2,\cdots$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}$，由 $x^2-1=0$，解得 $x=1$。所以函数 $f(x)$ 在 $1,-1,-2,\cdots$ 是无定义点，当然是间断点。

函数 $f(x)$ 的分段点：0 是分段点。

当 $x_0=-2,-3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}=\infty$，即是无穷间断点；

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-1}{\pi\cos \pi x}=-\dfrac{2}{\pi}$，是可去间断点；

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]$ 不存在，振荡间断点；

当 $x=0$ 时，由于

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{\sin \pi x}=-\frac{1}{\pi},\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}\right]=\sin(-1),$$

所以 $x=0$ 是跳跃间断点。

注 一般地，在讨论函数连续性时，通常要确定函数的表达式，然后找出无定义点和分段点，并求其极限。在求极限时，若该点是分段函数的分段点，只能求这点的左极限和右极限。有时即使不是分段点，但是当直接求这点的极限，而没办法确定时，同样也需要分别求左极限和右极限。

讨论函数的连续性、求函数的间断点、间断点所属类型方法综述

(1) 对已知表达式的函数而言，首先求两类的点：**无定义点，分段点**，其次求这些点的极限(或左右极限)，根据极限，判断无定义点是哪类间断点，分段点是否是间断点，若是，是哪类间断点；最后指出连续区间(去掉间断点剩余的区间)。

(2) 对未知表达式的函数而言，如用极限表示的函数，方程表示的函数，或两个已知函数的复合等，若讨论函数的连续性，必须求出函数的表达式，其他工作与(1)相同。

(3) 对抽象函数而言，一般是没办法求出函数表达式的，更多是讨论指定点的连续性，问题的实质成为求抽象函数在一点的极限，具体见 1.4 节题型 7。

练习题 1-3

1. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性。

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 的连续性。

3. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$

(1)证明：$g[f(x)]=1-f(x)$；(2)求 $f[g(x)]$ 的间断点，并指出间断点的类型。

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点，并指出间断点的类型。

6. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并指出间断点的类型和连续区间。

7. 确定 a 和 b 的值，使函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$，有可去间断点 $x=1$。

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ a, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 确定 a,b 的值，使得函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

9. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点，并指出间断点的类型。

1.4 关于函数、极限与连续的常见考研题型

题型 5 未知常数的确定

基本方法：建立含有未知常数的等式。

未知常数可能出现在下列两种情形中：

1. 极限中的未知常数

(1) 如果极限是分式形式，且 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$：若 $g(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，从而建立一个等式；如还需建立等式，可以将求得的未知常数代入极限等式中，确定另外一个常数；或用洛必达法则，出现新的极限等式，即 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，再利用这个方法。

(2) 如果极限是分式的形式，且 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$：若 $f(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，从而建立一个等式。

(3) 如果极限是积的形式，且 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)g(x)=A$：若 $g(x)\to\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，从而建立一个等式。

(4) 利用泰勒公式，将函数展成带有佩亚诺余项的关于 x 的多项式，根据极限值确定未知常数。

2. 函数中的未知常数

(1) 连续性：已知函数连续，可用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 建立等式；已知 x_0 是可去间断点，可

用$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$建立等式。

（2）可导性：已知函数在x_0可导，可用$f'_+(x_0)=f_-'(x_0)$建立等式。

（3）等价性：已知函数$f(x),g(x)$在$x\to x_0$时是等价无穷小，可用$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$建立等式。

确定函数中的未知常数，绝不是只有连续性、可导性和等价性，还有许多可利用的条件和性质建立等式，如例1.32的可去间断点，但绝大部分最终都表现为极限中未知常数的确定，特别是利用无穷小的比较建立等式，如例1.33。

例1.29 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数$a,b$的值。

解 【方法1】提取x，将极限变成积的形式，有

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x+1}-a-\frac{b}{x}\right)=0。$$

当$x\to\infty$时，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x+1}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$，即$1-a=0$，从而有$a=1$。将$a=1$代入极限式中，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)=0$，所以

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x(x+1)}{x+1}=-1。$$

【方法2】通分，将极限变成分式形式，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+b+1}{x+1}=0。$$

由于$x\to\infty$，所以若上式成立，只有$1-a=0,a+b=0$，解得$a=1,b=-1$。

例1.30 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$，求$a,b$值。

解 运用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=1,$$

当$x\to0$时，分子的极限为0，分母的极限$\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x)=0$，即$b-1=0$，于是有$b=1$。将$b=1$代入极限式中，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1。$$

所以$a=4$。

例 1.31 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$是连续函数，求 a,b 的值。

解 为了利用函数的连续性，首先求函数的表达式。

当$|x|<1$ 时，$f(x)=ax^2+bx$；

当$|x|>1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$；

当 $x=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$。于是函数 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & -\infty<x<-1,\\ \dfrac{1}{2}(-1+a-b), & x=-1,\\ ax^2+bx, & -1<x<1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ 1/x, & 1<x<\infty。\end{cases}$$

利用函数连续性，$f(x)$在 $x=1$ 处连续，当然右连续；在 $x=-1$ 处连续，当然左连续，即

$$f(1)=f(1^+),\quad f(-1)=f(-1^-),$$

因此有$\dfrac{1}{2}(1+a+b)=1$，$\dfrac{1}{2}(-1+a-b)=-1$，解得 $a=0,b=1$。

例 1.32 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-\alpha-\beta\sin x}{\ln(1+x^2)}$可去间断点，求常数 α 和 β。

解 由于 $x=0$ 是函数 $f(x)$可去间断点，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在。因为$\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x^2)=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-\alpha-\beta\sin x)=0$，即 $1-\alpha=0$，解得 $\alpha=1$。于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-1-\beta\sin x}{\ln(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+\sin x+\sin^2x-1-2\beta\sin x-\beta^2\sin^2x}{x^2(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+1+\beta\sin x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2x}{x^2(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+1+\beta\sin x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2x}{2x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-2\beta)}{2x}+\frac{1-\beta^2}{2}。\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，所以 $1-2\beta=0$，即 $\beta=\dfrac{1}{2}$。所以当 $\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{2}$时极限存在，此时 $x=0$ 是函数 $f(x)$可去间断点。

例 1.33 确定常数 a,b，使得 $\cos4x+a\cos2x+b$ 是关于 x 的四阶无穷小。

解 【方法 1】由已知条件可知：$\lim\limits_{x\to0}(\cos4x+a\cos2x+b)=0$，从而有 $1+a+b=0$。所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos4x+a\cos2x+b}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos4x+a\cos2x-a-1}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos4x-1)+a(\cos2x-1)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x-2a\sin^2 x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(-8\cos^2 x-2a)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos^2 x-2a}{x^2}=C\quad(C\neq 0),$$

根据极限性质,有$-8-2a=0$,即 $a=-4,b=3$。

【方法 2】由已知条件可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos4x+a\cos2x+b}{x^4}=C\quad(C\neq 0)$$

根据极限性质有$\lim\limits_{x\to 0}(\cos4x+a\cos2x+b)=0$,从而有 $1+a+b=0$。运用洛必达法则得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos4x+a\cos2x+b}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin4x-2a\sin2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-16\cos4x-4a\cos2x}{12x^2}=C。$$

根据极限性质有:$\lim\limits_{x\to 0}(-16\cos4x-4a\cos2x)=0$,从而有$-16-4a=0$,即 $a=-4,b=3$。

【方法 3】将函数 $\cos4x$ 和 $\cos2x$ 展成四阶泰勒公式,即

$$\cos4x=1-\frac{1}{2!}(4x)^2+\frac{1}{4!}(4x)^4+o(x^4)=1-8x^2+\frac{32}{3}x^4+o(x^4);$$
$$\cos2x=1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4),$$

所以

$$\cos4x+a\cos2x+b=1+a+b+(-8-2a)x^2+\left(\frac{32}{3}+\frac{2}{3}a\right)x^4+o(x^4)。$$

由于 $\cos4x+a\cos2x+b$ 是关于 x 的四阶无穷小,所以有 $1+a+b=0$,$-8-2a=0$,解得 $a=-4,b=3$。

求未知常数方法综述:

确定未知常数,关键是将未知常数建立在等式中。建立等式的具体方法:

(1) 根据极限性质,用确定未知常数的基本方法(1)~(3),建立等式。

(2) 若所建立的等式是恒等式,或不含未知常数(如 $0=0$ 或 $a=a$),这对求未知常数没有意义,如例 1.30,此时考虑用洛必达法则后,再用确定未知常数的基本方法(1)~(3),建立等式。

(3) 利用函数性质建立等式,如例 1.31。

(4) 利用无穷小的比较建立等式,如例 1.33。

(5) 求两个未知常数:如果先求出一个,可以将先求出的未知常数代入某个等式中,利用这个等式求出第二个未知常数,如例 1.30 和例 1.32;如果确定两个未知常数的关系,可以用一个表示另一个,代入某个等式中,求出其中一个未知常数,进而得到另一个未知常数,如例 1.33 的【方法 1】;当然也可以建立两个等式,解方程组,求出两个未知常数,如例 1.31。

(6) 对较为复杂的问题,可以应用泰勒公式,如例 1.33 的【方法 3】,将函数表示为带有佩亚诺余项的关于 x 的多项式,利用已知条件建立等式。

题型6 计算含有变限积分函数的极限

基本结论：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 可导，并且 $\Phi'(x)=f(x)$。

更一般地结论：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，则变限积分函数 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且

$$F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)。$$

基本方法：应用洛必达法则，将变限积分函数转化为初等函数。

例 1.34 求下列含变限积分函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x(\sqrt{x+1}-1)}$。

解 (1) 应用洛必达法则，使分子变成初等函数，从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2\mathrm{e}}。$$

(2) 先将分母作等价无穷小替换，再应用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x(\sqrt{x+1}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^4\cdot 2x}{x}=2。$$

计算含有变限积分函数的极限方法综述：

计算含有积分的极限，不论是变限积分函数（例 1.34），还是二重积分（例 9.9）乃至三重积分（练习题 9-2 的 4 和 5），都是将积分部分通过适当变换，化为可以求导的变限积分函数 $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 的形式，然后应用洛必达法则，使其变成初等函数的极限。因此说求此类型的极限，其关键将积分化为变限积分函数，独立出现在分子或分母中，应用洛必达法则，使其转化为初等函数的极限。

对一些比较复杂的积分，如果没办法转化为变限积分函数可求导形式，可考虑应用积分中值定理，见例 9.11。

题型7 计算抽象函数的极限

我们将已知表达式的函数称为具体函数；未知函数表达式，仅用一个符号表示的函数，如 $f(x)$，称为抽象函数。求抽象函数的极限有两个方法：

方法1 变形法

所谓变形法就是对所求极限，通过变形，化为可以利用已知条件的极限形式，或变化已知条件，获得简明结果，利用这个结果计算抽象函数的极限。

方法2 具体函数法

所谓具体函数法，就是利用极限和无穷小的关系，将抽象函数表示为带有无穷小项 $\alpha(x)$ 的“具体函数”，将这样的抽象函数代入所求极限中，从而得到所求的抽象函数的极限。

例 1.35 计算下列抽象函数的极限：

(1) 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；

(2) 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x(1-\cos x)}=0$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$；

(3) 设 $f(x)$具有连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$。

解 (1)【方法 1】变形法：因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=4$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$。由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=2$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，于是

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2。$$

【方法 2】具体函数法：由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，所以$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$。于是 $f(x)=[4+\alpha(x)](1-\cos x)$，因此

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{[4+\alpha(x)](1-\cos x)}{x}\right\}^{\frac{x}{[4+\alpha(x)](1-\cos x)}\cdot\frac{[4+\alpha(x)](1-\cos x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{[4+\alpha(x)](1-\cos x)}{x^2}}=e^2。$$

(2)【方法 1】变形法：因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x(1-\cos x)}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$。于是

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x+\sin6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos6x}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{x^2}=36。$$

【方法 2】具体函数法：由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x(1-\cos x)}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，根据极限与无穷小的关系，得到$\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha(x)=\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$，即

$$f(x)=x^2\alpha(x)-\frac{\sin6x}{x}。$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\alpha(x)\right]=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x}{x^3}=36。$$

(3) 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $f'(0)=0$。于是

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}。$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=2,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2。$$

计算抽象函数的极限方法综述

计算抽象函数的极限有两个方法：变形法和具体函数法。

(1) 变形法就是通过变形，简化极限，实现已知和所求的转换。这种方法存在的最大问题是：在变形过程中，可能没办法应用已知条件，无法求出抽象函数的极限。

(2) 具体函数法是根据已知条件将抽象函数表示为带有无穷小项 $\alpha(x)$ 的具体函数。再将这个“具体函数”代入所求极限中，利用常规求极限的方法，就可以求出含有抽象函数的极限。

(3) 对于比较简单的函数可考虑变形法，对于比较复杂的抽象函数最好应用具体函数法。

题型 8　求无穷小的阶数和阶的比较

方法 1　定义法

根据 k 阶无穷小的定义：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)/\beta^k(x)=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小。也就是说，若求 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的多少阶无穷小，我们只需确定极限

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\quad (C\neq 0)$$

式中的 k，使该极限是非零常数，这个 k 值就是无穷小 $\alpha(x)$ 关于无穷小 $\beta(x)$ 的阶数，我们将这一方法称为**定义法**。

方法 2　等价无穷小替换法

将所求无穷小作等价无穷小替换，使无穷小有更简单的形式，最后确定无穷小的阶数，我们将这一方法称为**等价无穷小替换法**。

方法 3　求导法

对不易替换的无穷小，可以求导，对求导后的函数再应用等价无穷小替换，这样得到的等价无穷小的阶数加求导次数，就是原函数无穷小的阶数，我们将这一方法称为**求导法**。

例如，当变量 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是无穷小，若 $f'(x)$ 是关于 x 的二阶无穷小，则 $f(x)$ 是关于 x 的三阶无穷小。

方法 4　泰勒公式

对一些不适宜上述方法的函数，判断其关于 x 的阶数，可以将函数展成带有佩亚诺余项的关于 x 的泰勒公式，从而确定关于 x 的阶数。

注　事实上，求无穷小的阶数是不必要等价替换的，只要同阶无穷小替换即可，这里之所以用等价替换，是因为我们熟悉等价无穷小替换公式，而且表示也很方便。

例 1.36　当 $x\to 0$ 时，求下列无穷小关于 x 的阶数：

(1) $\mathrm{e}^{x^4-2x^2}-1$；　(2) $(1+\tan^2 x)^{\sin x}-1$；　(3) $\dfrac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$；

(4) $x-\sin x$； (5) $\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$； (6) $\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$。

解 (1) 当 $x\to 0$ 时，$e^{x^4-2x^2}-1\sim x^4-2x^2\sim -2x^2$，所以 $e^{x^4-2x^2}-1$ 是关于 x 的二阶无穷小。

(2) 当 $x\to 0$ 时，

$$(1+\tan^2 x)^{\sin x}-1=e^{\sin x\ln(1+\tan^2 x)}-1\sim \sin x\ln(1+\tan^2 x)\sim \sin x\tan^2 x\sim x^3,$$

所以$(1+\tan^2 x)^{\sin x}-1$ 是关于 x 的三阶无穷小。

(3) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}=\dfrac{x^8(1+\sqrt{\cos x^2})}{1-\cos x^2}\sim\dfrac{2x^8}{\frac{1}{2}x^4}=4x^4$，所以$\dfrac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$是关于 x 的四阶无穷小。

(4)【求导法】由于$(x-\sin x)'=1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $x-\sin x$ 是关于 x 的三阶无穷小。

(5)【定义法】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin(1-\cos x)^2}{kx^{k-1}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)^2}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{4}x^4}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{4kx^{k-1}}=C。$$

若 $C\neq 0$，只需 $k-1=5$，即 $k=6$，所以$\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$ 是关于 x 的六阶无穷小。

【求导法】$\left(\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}x\right)'=\sin x\sin(1-\cos x)^2\sim x(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{4}x^5$，

所以$\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$ 是关于 x 的六阶无穷小。

(6)【求导法】由于

$$\left(\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t\right)'=\ln[1+(x-\sin x)](1-\cos x)。$$

又由于 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以$\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ 是关于 x 的 $1+3+2=6$ 阶无穷小。

例 1.37 当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 关于无穷小 x 的阶数。

解 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，$\cos 2x=1-\dfrac{(2x)^2}{2}+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$，

$\cos 3x=1-\dfrac{(3x)^2}{2}+o(x^2)=1-\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2)$，

所以

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=7x^2+\Delta_1 x^4+\Delta_2 x^6+o(x^2)。$$

于是 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 是 x 的二阶无穷小。

注 例 1.37 中的 Δ_1，Δ_2 是两个数值，不影响无穷小的阶，没必要算出具体结果。当然也可以不写，因为它们都是 x^2 的高阶无穷小，$\Delta_1 x^4+\Delta_2 x^6+o(x^2)=o(x^2)$！

求无穷小的阶数或阶的比较方法综述

(1) 求无穷小的阶数有四个方法。解题时首先考虑等价无穷小替换法，如例 1.36 中的

(1)～(3)题，它是最实用的、简单、易求的方法；对没办法直接作等价替换的无穷小，如(4)，(5)题，用求导法，求导后再考虑作等价无穷小替换，如(5)题。如果求导后对整体或局部仍没办法判断无穷小的阶数，可以考虑对整体或局部再求导，直至可以判断，如(6)题。

(2) 无穷小阶的比较，无非是计算一个函数是另一个函数的高阶、低阶、同阶、k 阶和等价无穷小，可用替换法和求导法，求出两个函数关于变量 x 的无穷小阶数，然后再作比较。当然也可用定义法，求极限 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，或确定 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq0)$ 中未知常数的 k，使 C 是非零常数，从而得到所需结论。

(3) 对应用定义法或求导法(洛必达法则)后更加复杂的函数，可以用泰勒公式，如例 1.37。

练习题 1-4

1. 求下列含有变限积分函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+\sin t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\tan^2x}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$。

2. 求下列各式中的未知常数：

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求常数 a；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$，求 a,b 值；

(3) 当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 比 x^2 是高阶无穷小，求 a,b 值；

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant0\end{cases}$ 连续，求常数 a；

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+b}{1-x}, & x>1,\\ 1+x^2, & x\leqslant1,\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，求常数 a,b 的值；

(6) 已知 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+ax+b}{2x^3+3x^2-1}=c$，求常数 a,b,c 的值；

(7) 若函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{x(x-1)}$ 有可去间断点，求 a 值；

(8) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^b-n^b}=2010$，求 a,b 的值；

(9) 确定常数 a,b,c，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$；

(10) 已知当 $x\to0$ 时，$x-(a+b\mathrm{e}^{x^2})\sin x$ 是关于 x 的五阶无穷小，求常数 a,b 的值。

3. 当 $x\to 0$ 时,求下列无穷小量关于 x 的阶数:

(1) $1-\cos^2 x$; (2) $\sin x-\tan x$; (3) $e^x+e^{-x}-2$;

(4) $\int_0^{1-\cos x}(e^{2t}-1)\mathrm{d}t$; (5) $3x^3-4x^4+5x^5$; (6) $e^{x^2}-\cos x$。

4. 试确定常数 A,B,C 的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 的高阶无穷小。

5. 求下列抽象函数的极限:

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=3$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$。

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{\sin\pi x}=4$,求 $f(2)$ 和 $f'(2)$。

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$。

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处有 $f(0)=0,f'(0)=-1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}$。

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数,$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$。

1.5 数列、函数、极限与连续考研真题

一、数列、函数、极限与连续考研数一真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里,关于数列、函数、极限与连续的考研数一真题共出了25道题,题型分布在:

1. 计算函数极限:共有8个题,分布在2003年,2006年,2008年,2010年,2011年,2014年,2015年和2016年。

2. 数列收散性的证明和讨论:共有7个题,分布在2003年,2006年(i),2007年,2008年,2011年,2018年和2019年。

3. 计算数列极限:共有2个题,分布在2006年(ii)和2017年。

4. 未知常数的确定:共有5个题,分布在2009年,2013年,2015年,2017年和2018年。

5. 无穷小的比较:共有3个题,分布在2004年,2007年和2019年。

6. 点的性质讨论:有1题,分布在2016年。

1 数列、函数、极限与连续考研数一真题题型分析

1. 计算函数极限:2003年,2010年和2011年考了幂指函数的极限;2006年和2015年考了初等函数的极限;2008年考了利用变量替换和等价无穷小替换求函数的极限;2014年和2016年考了含有变限积分函数的极限。

2. 数列敛散性的证明和讨论:2003年考了数列极限的性质,2006年,2018年和2019年考了利用单调有界原理证明数列收敛,并求该数列极限;2007年和2008年考了利用函数单调性、单调有界原理判断数列收敛性;2011年考了利用单调有界原理证明数列收敛。

3. 计算数列极限：2006 年(ii)考了用转化法计算数列极限；2017 年考了用积分法计算数列极限。

4. 未知常数的确定：2009 年，2013 年和 2018 年考了极限中未知常数的确定，这两个题的解法是类似的；2015 年考了利用等价无穷小确定函数中的未知常数；2017 年考了利用连续性确定函数中的未知常数。

5. 无穷小的比较：2004 年考了三个无穷小比较；2007 考了判别四个无穷小哪个与$\sqrt{x}$是等价无穷小。前一个可用求导方法(积分上限函数的导数)确定阶数，后一个可用等价无穷小替换方法确定；2019 年考了求无穷小的阶。

6. 点的性质讨论：2016 年考虑讨论了分段函数在分段点的连续性和可导性。

2　数列、函数、极限与连续考研数一真题

1. (2003，一(1)(4 分))求$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$。

考点与解法：计算幂指函数的极限。用重要极限公式或用 e 抬起，计算指数部分的极限。

2. (2003，二(2)(4 分))设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$和$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立；　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立；

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在；　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在。

考点与解法：数列极限性质。利用收敛数列的定义和性质。

3. (2004，二(7)(4 分))把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列顺序是

(A) α,β,γ；　　(B) α,γ,β；　　(C) β,α,γ；　　(D) β,γ,α。

考点与解法：无穷小的比较。利用求导法，判断每一个求导后关于无穷小 x 的阶数。

4. (2006，一(1)(4 分))求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$。

考点与解法：计算初等函数的极限。利用等价无穷小替换或直接应用洛必达法则。

5. (2006，三(16)(12 分))设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$。

(i) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限；(ii) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

考点与解法：单调有界原理、计算幂指型数列的极限。(i)利用单调有界原理证明极限存在，根据递推公式求极限；(ii)利用转化法，将数列极限转化为函数极限，再用重要极限公式或用 e 抬起，计算指数部分的极限。

6. (2007，一(1)(4 分))当 $x\to0^+$ 时，与$\sqrt{x}$是等价无穷小量是

(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$；　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$；　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$。

考点与解法：无穷小的比较。利用等价无穷小替换，确定哪一个与$\sqrt{x}$是等价无穷小。

7. (2007，一(5)(4 分))设函数 $f(x)$在 $x=0$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$。令 $u_n=$

$f(n)$,则下列结论正确的是:

(A) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$收敛; (B) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$发散;

(C) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$收敛; (D) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$发散。

考点与解法:判断数列敛散性。用拉格朗日定理和单调有界原理讨论$\{f(n)\}$的敛散性。

8. (2008,一(4)(4分))设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是

(A) 若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛; (B) 若数列$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛;

(C) 若数列$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛; (D) 若数列$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛。

考点与解法:判断数列敛散性。利用函数的单调性和单调有界原理判断$\{x_n\}$和$\{f(x_n)\}$的敛散性。

9. (2008,三(15)(9分))求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$。

考点与解法:计算函数极限。利用等价无穷小替换 $\sin x\sim x$ 和变量替换。

10. (2009,一(1)(4分))当 $x\to 0^+$时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$; (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$; (C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$;(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$。

考点与解法:函数中未知常数的确定。利用等价无穷小建立极限等式,再用洛必达法则,建立等式。求出一个未知常数,代回原极限中,求出另一未知常数。

11. (2010,一(1)(4分))极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right]^x=$________。

(A) 1; (B) e; (C) e^{a-b}; (D) e^{b-a}。

考点与解法:计算幂指函数极限。用重要极限公式或用 e 抬起,计算指数部分极限。

12. (2011,三(15)(10分))求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$。

考点与解法:计算幂指函数极限。用重要极限公式或用 e 抬起,计算指数部分极限。

13. (2011,三(18)(10分))

(i) 证明:对任意的正整数 n,都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$;

(ii) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛。

考点与解法:证明不等式和数列收敛。(i)利用拉格朗日定理证明不等式;(ii)利用单调有界原理证明数列$\{a_n\}$收敛。

14. (2013,一(1)(4分))已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 都是常数,且 $c\neq 0$,则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$; (B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$; (C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$; (D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$。

考点与解法:极限中未知常数的确定。应用洛必达法则,建立等式。

15. (2014,三(15)(10分))求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$。

考点与解法：计算含有积分上限函数的极限。分母作等价无穷小替换后，用洛必达法则。

16.（2015，二(9)(4 分)）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$。

考点与解法：计算初等函数的极限。应用洛必达法则。

17.（2015，三(15)(10 分)）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$ 是函数 $g(x)=kx^3$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小，求常数 a,b,k。

考点与解法：函数中未知常数的确定。用等价无穷小建立等式，再用洛必达法则，建立等式；也可以利用泰勒公式。

18.（2016，二(9)(4 分)）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}$。

考点与解法：计算含有积分上限函数的极限。等价无穷小替换后，再用洛必达法则。

19.（2016，一(4)(4 分)）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导；　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

考点与解法：点的性质讨论。求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，利用间断点的定义和导数的定义。

20.（2017，一(1)(4 分)）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$；　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$；　(C) $ab=0$；　(D) $ab=2$。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，左极限等于右极限，建立等式。

21.（2017，三(16)(10 分)）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$。

考点与解法：计算数列极限。利用积分法，将极限转化为定积分，求定积分值。

22.（2018，二(9)(4 分)）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，求 k 的值。

考点与解法：极限中未知常数的确定。求出极限，建立含有 k 的等式，从而求出 k 的值。

23.（2018，三(19)(10 分)）设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$ 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

考点与解法：证明数列收敛，并求极限。证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减，有下界，收敛；对递推公式两端取极限。

24.（2019，一(1)(4 分)）当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4。

考点与解法：求无穷小的阶数。可以利用定义法，也可以利用求导法和等价替换法。

25.（2019，三(18)(10分)）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

(i) 证明数列$\{a_n\}$单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

(ii) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$。

考点与解法：证明数列单调递减，求递推公式；求数列极限。(i)作差，证明积分小于0；用三角代换计算 a_n，得到递推公式；(ii)根据结论(i)，利用夹逼法则求出极限或对递推公式两端同除 a_{n-1}，再取极限。

二、数列、函数、极限与连续考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于数列、函数、极限与连续的考研数三真题共出了47道题，题型分布在7类题型中

1. 计算数列极限：共有5个题，分布在2006年，2013年，2016年，2017年和2019年。
2. 判断数列敛散性：共有2个题，分布在2014年和2015年。
3. 计算函数极限：共有17题，分布在2004年，2005年(2题)，2006年，2007年，2008年，2009年，2010年，2011年(2题)，2012年(2题)，2014年，2015年，2016年(2题)和2017年。
4. 点的性质讨论：共有6个题，分布在2003年，2004年，2006年，2008年，2009年和2013年。
5. 未知常数的确定：共有10个题，分布在2004年，2008年，2009年，2010年，2011年，2013年，2014年，2015年，2017年和2018年。
6. 无穷小(大)的比较：共有3个题，分布在2007年，2010年和2013年。
7. 函数性质的讨论：共有2个题，分布在2003年和2004年。
8. 证明数列收敛，并求极限：共有2个题，分布在2018年和2019年。

1 数列、函数、极限与连续考研数三真题题型分析

1. 计算数列极限：2006年考了幂指型数列的极限，可用e抬起，计算指数部分极限，也可利用子数列的收敛性；2013年考了利用转化法求数列的极限；2016年和2017年考了利用积分法计算数列极限；2019年考了利用重要公式求数列极限。

2. 判断数列的敛散性：2014年考了收敛数列的性质；2015年考了子数列的收敛性。

3. 计算函数极限：2004年，2005年(2题)，2008年，2009年，2011年，2012年和2015年考了求初等函数的极限，包括应用有理化法、恒等变换法、变量替换法、公式法、等价无穷小替换法，洛必达法则；2006年考了二元函数的累次极限，表示为一元函数的极限；2007年考了无穷小与有界量的积是无穷小；2010年，2012年和2016年考了幂指函数的极限；2014年和2017年考了变限积分函数的极限；2011年和2016年考了抽象函数的极限。

4. 点的性质讨论：2003年考了求函数在点 $x=0$ 的极限，根据极限情况确定选项；还考了补充区间端点的定义，使之变为闭区间上连续函数；2004年考了求点 $x=0$ 的极限，根据极限情况确定选项；2006年考了讨论函数在点 $x=0$ 处的单侧导数的存在性；2008年考了求含有变限积分函数在无定义点 $x=0$ 处的极限，从而确定间断点的类型；2009年和2013年

考了求可去间断点的个数。

5. 未知常数的确定：2004 年，2010 年和 2018 年考了极限中未知常数的确定；2008 年和 2017 年考了函数中未知常数的确定，利用连续性建立等式；2009 年，2011 年，2013 年，2014 年和 2015 年考了函数中未知常数的确定，利用等价无穷小、高阶无穷小建立关于极限的等式，从而确定未知常数。

6. 无穷小(大)的比较：2007 年考了四个无穷小哪个与$\sqrt{x}$是等价无穷；2010 年考了三个无穷大的比较；2013 年考了无穷小符号运算性质。

7. 函数性质的讨论：2003 年考了补充区间端点的定义，变为连续函数；2004 年考了判断函数在哪个开区间有界。

8. 证明数列收敛，并求极限：2018 年和 2019 年考了证明数列收敛，并求极限。

2　数列、函数、极限与连续考研数三真题

1. (2003，二(1)(4 分))设函数 $f(x)$为不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在；　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$；

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在；　　(D) 有可去间断点 $x=0$。

考点与解法：点的性质讨论。利用 $f(x)$为不恒为零的奇函数，得到 $f(0)=0$，于是 $f'(0)$存在，推导出 $g(x)$在点 $x=0$ 处极限存在。

2. (2003，三(8 分))设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$使得 $f(x)$在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$连续。

考点与解法：函数性质的讨论。补充定义，使 $f(x)$在区间端点 $x=1$ 处左连续，即 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$。

3. (2004，一(1)(4 分))若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a 和 b 值。

考点与解法：极限中未知常数的确定。建立等式求出 a，代入原极限中，再求 b。

4. (2004，二(7)(4 分))函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间中有界

(A) $(-1,0)$；　(B) $(0,1)$；　(C) $(1,2)$；　(D) $(2,3)$。

考点与解法：开区间上连续函数的性质。如果函数在开区间连续，左端点的右极限和右端点左极限存在或有界，则函数在该开区间上有界。只需求每个开区间的左端点右极限和右端点的左极限。

5. (2004，二(8)(4 分))设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点；　　(B) $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点；

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点；　　(D) $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 有关。

考点与解法：点的性质讨论。计算 $g(x)$在点 $x=0$ 处的极限。

6. (2004，三(15)(8分))求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

考点与解法：计算初等函数极限。通分，等价无穷小替换，洛必达法则。

7. (2005，一(1)(4分))计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$。

考点与解法：计算初等函数极限。利用等价无穷小替换 $\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$。

8. (2005，三(15)(8分))求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$。

考点与解法：计算初等函数极限。通分，等价无穷小替换，洛必达法则。

9. (2006，一(1)(4分))求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$。

考点与解法：计算数列极限。利用子序列收敛性：偶子列与奇子列的极限相等；也可用恒等变换，用 e 抬起，计算指数部分的极限。

10. (2006，二(8)(4分))设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$存在； (B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$存在；

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$存在； (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$存在。

考点与解法：点的性质讨论。利用左、右导数定义，求极限。

11. (2006，三(15)(7分))设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x,y>0$。求

(i) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$； (ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$。

考点与解法：二元函数的累次极限。当 $y\to+\infty$时，x 是常量，得到 $g(x)$，再求 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$，实际是计算累次极限。

12. (2007，一(1)(4分))题目同上小节 6.(2007，一(1)(4分))题。

13. (2007，二(11)(4分))计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$。

考点与解法：计算初等函数极限。利用无穷小与有界函数的积是无穷小。于是只需说明$\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}$是无穷小，$\sin x+\cos x$ 是有界函数。

14. (2008，一(1)(4分))设函数 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上连续，$x=0$ 是 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的

(A) 跳跃间断点； (B) 可去间断点；

(C) 无穷间断点； (D) 振荡间断点。

考点与解法：点的性质讨论。求函数 $g(x)$在 $x=0$ 处的极限，根据极限确定间断点类型。

15. (2008，二(9)(4分))设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\geqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|<c\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，求 c。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用函数在 c 点连续，有 $f(c^-)=f(c^+)$，建立等式。

16.（2008，三(15)(9 分)）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$。

考点与解法：计算初等函数极限。利用 $\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]\sim\frac{\sin x-x}{x}$，再用洛必达法则，或对极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$用洛必达法则。

17.（2009，一(1)(4 分)））函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 无穷多个。

考点与解法：求间断点。找出所有间断点，并判断类型。

18.（2009，一(2)(4 分)）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$； (B) $a=1,b=\frac{1}{6}$； (C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$；(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用等价无穷小，建立等式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，以此确定函数中的未知常数。

19.（2009，二(9)(4 分)）计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$。

考点与解法：计算初等函数极限。利用等价替换公式$(1+x)^a-1\sim ax$ 和 $e^x-1\sim x$，再用洛必达法则。

20.（2010，一(1)(4 分)）若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，求 a 的值。

考点与解法：极限中未知常数的确定。化为分式形式，洛必达法则，建立等式。

21.（2010，一(4)(4 分)）设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$； (B) $h(x)<g(x)<f(x)$；

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$； (D) $g(x)<f(x)<h(x)$。

考点与解法：无穷大的比较。计算当 $x\to+\infty$，计算两个函数比的极限，若是无穷大，分子大于分母，若是 0，分母大于分子。

22.（2010，三(15)(10 分)）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

考点与解法：计算幂指函数极限。用 e 抬起，计算指数部分的极限。

23.（2011，一(1)(4 分)）已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

(A) $k=1,c=4$； (B) $k=1,c=-4$； (C) $k=3,c=4$； (D) $k=3,c=-4$。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用等价无穷小，建立等式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，以此确定函数中的未知常数 c 和 k 的值。

24.（2011，一(2)(4 分)）设 $f(x)$在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$； (B) $-f'(0)$； (C) $f'(0)$； (D) 0。

考点与解法：计算抽象函数的极限。利用 $f'(0)$的定义

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，有 $f(x)=xf'(0)+x\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)\to 0$。利用 $f(x)=xf'(0)+x\alpha(x)$，求极限。

25．(2011，三(15)(10分))求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$。

考点与解法：计算初等函数的极限。有理化，等价无穷小替换，洛必达法则。

26．(2012，二(9)(4分))求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$。

考点与解法：计算幂指函数极限。利用重要极限公式或用 e 抬起，计算指数部分的极限。

27．(2012，三(15)(10分))求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$。

考点与解法：计算初等函数极限。分子提取 $e^{2-2\cos x}$，等价无穷小替换，洛必达法则。

28．(2013，一(1)(4分))当 $x\to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$； (B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$；

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$； (D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$。

考点与解法：无穷小符号运算性质。根据 $o(\alpha)$的定义。

29．(2013，一(2)(4分))函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$的可去间断点的个数为

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

考点与解法：点的性质讨论。找出间断点，并判断所属类型。

30．(2013，二(9)(4分))设曲线 $y=f(x)$与 $y=x^2-x$ 在点(1,0)处有公共切线，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$。

考点与解法：求数列极限。应用转化法，将数列极限转化为函数极限，即取$\dfrac{n}{n+2}=x$，则

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}f(x)=-2\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}。$$

31．(2013，三(15)(10分))当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，求 n 与 a 的值。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用泰勒公式或添加项组合。

32．(2014，一(1)(4分))设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$； (B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$； (C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$； (D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$。

考点与解法：收敛数列的性质。利用数列极限的定义。

33．(2014，一(3)(4分))设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是

(A) $a=0$；　　(B) $b=1$；　　(C) $c=0$；　　(D) $d=\frac{1}{6}$。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用高阶无穷小定义，有$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，利用洛必达法则或泰勒公式确定函数中的未知常数 a,b,c 和 d 的值。

34. (2014，三(15)(10 分)) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$。

考点与解法：求含有变限积分函数的极限。等价无穷小替换、洛必达法则。

35. (2015，一(1)(4 分))设$\{x_n\}$是一数列，下列命题中不正确的是：

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$；　(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$；　(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

考点与解法：子序列的收敛性。利用收敛数列性质和子序列的收敛性质，确定选项。

36. (2015，二(9)(4 分))题目同上小节 16.(2015，二(9)(4 分))题。

37. (2015，三(15)(10 分))设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$ 是函数 $g(x)=kx^3$ 在 $x\to0$ 时为等价无穷小，求常数 a,b,k。

考点与解法：函数中未知常数的确定。利用等价无穷小，建立等式$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，应用洛必达法则或泰勒公式，建立等式。

38. (2016，二(9)(4 分))已知函数 $f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

考点与解法：求抽象函数的极限。用具体函数法，求抽象函数的极限。

39. (2016，二(10)(4 分))计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$。

考点与解法：求数列极限。用积分法求数列极限。

40. (2016，三(15)(10 分))求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

考点与解法：求幂指函数的极限。用 e 抬起，计算指数部分的极限。

41. (2017，一(1)(4 分))题目同上小节 20.(2017，一(1)(4 分))题。

42. (2017，三(15)(10 分)) 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$。

考点与解法：求含有变限积分函数的极限。通过变量代换，化为可利用求导公式求导的变限积分函数，再应用洛必达法则。

43. (2017，三(17)(10 分))题目同上小节 21.(2017，三(16)(10 分))题。

44. (2018，三(15)(10 分))已知实数 a,b 满足$\lim\limits_{x\to0}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a,b 的值。

考点与解法：极限中未知常数的确定.利用倒变换，将极限化为商的形式，建立等式。

45. (2018，三(19)(10 分))题目同上小节 23.(2018，三(19)(10 分))题。

46. (2019，二(9)(4 分))计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n$。

考点与解法：求数列极限。化简，利用重要公式。

47.（2019，三(18)(10分)）题目同上小节25.（2019，三(18)(10分)）题。

1.6 本章练习题答案与提示

练习题1-1答案与提示

1.（1）$\frac{1}{3}$。提示：分子分母同时除以3^n或3^{n+1}。（2）$\frac{24}{5}$。提示：分子分母同时除以n^3。（3）1。提示：分子分母同时除以n。（4）3。提示：分子拆开，消去n^3，分子分母同时除以n^2。

2.（1）2。提示：分子分母同时乘以$\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$，化简，再同除$\sqrt{n}$。（2）2。提示：分子分母同时乘以$\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}$，化简，再同除$n$。（3）0。提示：利用公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，分子分母同乘$n^2-n(4-n^3)^{\frac{1}{3}}+(4-n^3)^{\frac{2}{3}}$，再同除$n^2$。（4）2。提示：分母有理化，分子分母同乘$\sqrt{n^3(n+1)}+n^2$，分子分母再同除$n^3$。

3.（1）1。提示：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$。

（2）0。提示：$\frac{1}{4n}=\frac{n}{(n+n)^2}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\leqslant\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$。

（3）0。提示：由于$0\leqslant x\leqslant 1$，所以$0\leqslant\frac{x^n}{1+x^n}\leqslant x^n$，$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$。

4.（1）$\frac{4}{3}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^2}{(n+1)^3-n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^2}{3n^2+3n+1}$。

（2）$\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}$。

（3）1。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}=1$。

（4）1。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=1$。

5.（1）$\ln a$。提示：令$\frac{1}{n}=x$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$。

（2）$\frac{1}{2}$。提示：令$\frac{1}{n}=x$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$。

（3）$\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$。提示：令$\frac{1}{n}=x$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}。$$

（4）1。提示：令$\sqrt[n]{n}=x$，$x\to 1$。于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$。

6.（1）$\frac{\pi}{4}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

(2) $\frac{2}{3}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$。

(3) $\frac{2}{\pi}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n}\pi+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}。$$

(4) $\frac{1}{\mathrm{e}}$。提示：利用恒等变换，将积的形式化为指数部分为和的形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\ln1+\ln2+\cdots+\ln n)-n\ln n]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{(x\ln x-x)}\Big|_0^1=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

(5) $1-\cos b$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}=\ln b\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}$，由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{k}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k+1}{n}}\sin b^{\frac{k+1}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k+1}{n}}\sin b^{\frac{k+1}{n}}=\int_0^1 b^x\sin b^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln b}(1-\cos b)。$$

7. (1) e^{-2}。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot\frac{2n+1}{-(n+2)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{-(n+2)}}=\mathrm{e}^{-2}$。

(2) e^2。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-3}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+4}{n^2+n-3}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(n+1)}{n^2+n-3}}=\mathrm{e}^2$。

(3) 1。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\sin^2\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=1$。

(4) $\sqrt[3]{abc}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}-1\right]}$，利用转化法，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}。$$

(5) e^2。提示：利用两角和正切公式及重要极限公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\right)^n=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x}{x(1-\tan x)}}=\mathrm{e}^2。$$

(6) $\ln a$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln a。$$

8. 提示：【方法 1】单调原理：$x_1>x_2$，假设 $x_{n-1}>x_n$，则 $\sqrt{x_{n-1}+6}>\sqrt{x_n+6}$，即 $x_n>x_{n+1}$，于是单调减少。由于对任何 n，$x_n>0$，于是数列有下界。所以数列极限存在。对递推公式取极限，求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

【方法 2】验证法：利用递推公式，求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。由于

$$|x_n-3|\leqslant|\sqrt{x_{n-1}+6}-3|=\frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+6}+3}|x_{n-1}-3|\leqslant\frac{1}{3}|x_{n-1}-3|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{3^{n-1}}|x_1-3|,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}}|x_1-3|=0$，根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-3|=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

9. 提示：对递推公式两端取极限，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}(x_{n-1}+3)$，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。利用验证法。

$$|x_n-1|\leqslant\left|\frac{1}{4}(x_{n-1}+3)-1\right|=\frac{1}{4}|x_{n-1}-1|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{4^n}|x_0-3|。$$

此题可以用单调有界原理证明。

10. 提示：令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对递推公式两端取极限，求出$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，再证明

$$|x_{n+1}-a|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+a}\right|=\frac{1}{(1+a)(1+x_n)}|x_n-a|\leqslant\frac{1}{(1+a)}|x_n-a|,$$

其中$\frac{1}{1+a}<1$。

11. 提示：利用单调有界原理证明：由于$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，则$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}[x_n+(3-x_n)]=\frac{3}{2}$，所以$\{x_n\}$有上界。又由于

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{x_n(3-x_n)-x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0。$$

所以单调递增，故收敛。对递推公式两段取极限，解得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$。

12. 提示：(1) 利用拉格朗日定理$\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi}\leqslant\frac{1}{n}$，$n<\xi<n+1$，则

$$\ln 2-\ln 1\leqslant 1,\ln 3-\ln 2\leqslant\frac{1}{2},\cdots,\ln(n+1)-\ln n\leqslant\frac{1}{n},\ln(1+n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n};$$

再利用拉格朗日定理$\ln n-\ln(n-1)=\frac{1}{\xi}\geqslant\frac{1}{n}$，$n-1<\xi<n$，则

$$\ln 2-\ln 1\geqslant\frac{1}{2},\ln 3-\ln 2\geqslant\frac{1}{3},\cdots,\ln n-\ln(n-1)\geqslant\frac{1}{n},1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n。$$

(2) 根据结论(1)$1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\ln n}{\ln(1+n)}=1$。

练习题1-2答案与提示

1. (1) $\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}=\frac{1}{2}。$$

(2) $\frac{1}{4}$。【方法1】用公式$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$有理化，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-5x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-2x})[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-2x}+(\sqrt[3]{1-2x})^2](\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-5x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-5x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-5x})[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-2x}+(\sqrt[3]{1-2x})^2]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-5x})}{8x[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-2x}+(\sqrt[3]{1-2x})^2]}=\frac{1}{4}。$$

【方法2】将分子变成等价替换公式形式，并计算部分因子的极限，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-2x}}-1\right)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-5x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-5x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-5x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-2x}}-1\right)\cdot 2}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{3x}{1-2x}}-1\right)}{8x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{1-2x}}{x}=\frac{1}{4}。$$

(3) $\frac{1}{3}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}。$$

(4) -3。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=6\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-3。$$

(5) e。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}}=e$。

(6) $-\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=-\frac{1}{2}。$$

(7) $\frac{\alpha}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha\cos^{\alpha-1}x\cdot\sin x}{2x}=\frac{\alpha}{2}$。

(8) 1。提示：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\tan x\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\ln\sin x}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x\cdot\sin x}}=e^0=1$。

(9) $\frac{1}{6}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos x}{x\sin x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$。

(10) $\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$。

(11) $\frac{4}{3}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cos x+2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3\cos x-x\sin x}=\frac{4}{3}。$$

(12) -1。提示：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{-3x^2}=-1$。

(13) $\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot 2}=\frac{1}{2}$。

(14) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$。提示：$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\lim\limits_{x\to a^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}$。

(15) 3ln2。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{1+2^x}=3\ln 2$。

(16) $-\frac{1}{6}$。提示：令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\cdot\sin t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}=-\frac{1}{6}。$$

(17) 1。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(e^{\tan x-x}-1)}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x-x}-1}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{2}x}{x^{2}}=1。$$

(18) e。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^{2}x}-1}{(e+x)^{x}-e^{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2}x}{e^{x}\left[e^{x\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}-1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{x\ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right)}=e$。

(19) $-\dfrac{1}{4}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}+x^{3}\sin\dfrac{1}{x}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^{2}}+\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^{2}(\sqrt{\cos x}+1)}=-\dfrac{1}{4}$。

(20) $\dfrac{1}{3}$。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\dfrac{9}{2}x^{2}}$

$$=\frac{2}{9}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^{2}}\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{3}。$$

2. (1) e^{2}。提示：令 $\dfrac{1}{x}=t$，$t\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}}=e^{2}$。

(2) $\dfrac{1}{2}$。提示：令 $\sin x=t$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$。所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{(\sin x)^{3}}\cdot\frac{(\sin x)^{3}}{x^{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t-\sin t}{t^{3}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t(1-\cos t)}{t^{3}}=\frac{1}{2}。$$

3. (1) $\dfrac{3}{2}$。提示：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^{3}+3x^{2}}-\sqrt[4]{x^{4}-2x^{3}})=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t},$$

$\sqrt[3]{1+3t}=(1+3t)^{\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{3}\cdot 3t+o(t)$，$\sqrt[4]{1-2t}=(1-2t)^{\frac{1}{4}}=1+\dfrac{1}{4}\cdot(-2t)+o(t)$，

$\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}=\dfrac{3}{2}t+o(t)$，所以 $\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{\dfrac{3}{2}t+o(t)}{t}=\dfrac{3}{2}$。

(2) $\dfrac{1}{3}$。提示：由于 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^{2}+\dfrac{1}{4!}x^{4}+o(x^{4})$，

$e^{-\frac{1}{2}x^{2}}=1+\left(-\dfrac{1}{2}x^{2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}x^{2}\right)^{2}+o(x^{4})$，所以 $\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^{2}}=-\dfrac{1}{12}x^{4}+o(x^{4})$；

又由于 $x+\ln(1-x)=x+\left[(-x)-\dfrac{1}{2}(-x)^{2}+o(x^{2})\right]=-\dfrac{1}{2}x^{2}+o(x^{2})$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^{2}}}{(1-\cos x)[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}x^{4}+o(x^{4})}{\dfrac{1}{2}x^{2}\left[-\dfrac{1}{2}x^{2}+o(x^{2})\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}+\dfrac{o(x^{4})}{x^{4}}}{\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^{2})}{x^{2}}\right]}=\frac{1}{3}。$$

(3) $-\dfrac{1}{12}$。提示：$\sqrt{1+x^{2}}=(1+x^{2})^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x^{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)x^{4}+o(x^{4})$，

$1+\dfrac{1}{2}x^{2}-\sqrt{1+x^{2}}=\dfrac{1}{8}x^{4}+o(x^{4})$，

$e^{x^{2}}=1+x^{2}+o(x^{2})$；$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^{2}+o(x^{2})$，$\cos x-e^{x^{2}}=-\dfrac{3}{2}x^{2}+o(x^{2})$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{1}{2}x^{2}-\sqrt{1+x^{2}}}{\ln(1+x^{2})(\cos x-e^{x^{2}})}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{4}x^{4}+o(x^{4})}{x^{2}\cdot\left[-\dfrac{3}{2}x^{2}+o(x^{2})\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{8}+\dfrac{o(x^{4})}{x^{4}}}{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{o(x^{2})}{x^{2}}}=-\frac{1}{12}。$$

(4) $\frac{1}{3}$。提示：$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$；$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，

$$e^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\frac{1}{3}。$$

此题还可以用洛必达法则。

4. (1) 2。提示：由于$\frac{2}{x}-1\leqslant\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$，因此当 $x>0$ 时，$2-x\leqslant x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant2$，于是 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{2}{x}\right]=2$；当 $x<0$ 时，$2-x\geqslant x\left[\frac{2}{x}\right]\geqslant2$，于是 $\lim\limits_{x\to0^-}x\left[\frac{2}{x}\right]=2$。故 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{2}{x}\right]=2$。

(2) 0。提示：在$[0,1]$上有 $0\leqslant\frac{t^x}{1+e^t}\leqslant t^x$，根据定积分的保序性得

$$0\leqslant\int_0^1\frac{t^x}{1+e^t}dt\leqslant\int_0^1t^x dt=\frac{1}{x+1},$$

当 $x\to+\infty$时，不等式的两端的极限为零。

(3) $\frac{2}{\pi}$。提示：对充分大的 x，一定有 $k\in\mathbb{Z}^+$，使得 $k\pi\leqslant x\leqslant(k+1)\pi$，因为

$$\frac{2k}{(k+1)\pi}=\frac{\int_0^{k\pi}|\sin t|dt}{(k+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}\leqslant\frac{\int_0^{(k+1)\pi}|\sin t|dt}{k\pi}=\frac{2k+2}{k\pi}。$$

当 $x\to+\infty$，$k\to+\infty$，不等式两端的极限都等于$\frac{2}{\pi}$。

(4) 0。提示：由于 $f(x)$有界，所以$\exists M>0$ 有$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，当 $x\to+\infty$时，

$$-\frac{M}{2x}=\frac{\int_0^x-Mt dt}{x^3}\leqslant\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}\leqslant\frac{\int_0^x Mt dt}{x^3}\leqslant\frac{M}{2x},$$

当 $x\to+\infty$时，不等式两端的极限是零。

5. (1) 1。提示：由于函数中含有$|x|$，且有 e^∞，所以只能求 0 点的左右极限，进而判断函数在这点的极限。

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2-1=1。$$

(2) $\frac{\pi}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}。$$

练习题 1-3 答案与提示

1. 提示：当$|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$，当$|x|>1$ 时，$f(x)=0$，当 $x=1$ 时，$f(x)=1$，当 $x=-1$，$f(x)=0$，于是函数的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1],\\1+x, & x\in(-1,1),\\1, & x=1,\\0, & x\in(1,+\infty)。\end{cases}$$

函数有两个分段点，在 $x=-1$ 处连续，在 $x=1$ 是跳跃间断点，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续。

2. 提示：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 是分段点，且

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)=1+\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=1=f(0);$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^{\frac{1}{x}}+1)=1=f(0)$，所以函数在 $x=0$ 既是右连续，又是左连续，所以函数 $x=0$ 连续，在 $(-\infty,0)$ 上，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}+1$ 是初等函数，有定义，连续，在 $(0,+\infty)$ 上函数 $f(x)=1+x\sin\dfrac{1}{x}$ 是初等函数，有定义，连续。所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

3. 提示：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 是无定义的点，当然是间断点。根据在这两点的极限可知，$x=0$ 是无穷间断点(第二类间断点)，$x=1$ 是跳跃间断点(第一类间断点)，函数在 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续。

4. 提示：由于 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则 $g(f(x))=\begin{cases}0, & x>0,\\ 1, & x\leqslant0,\end{cases}$ 于是 $g(f(x))=1-f(x)$。复合函数

$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 于是 $x=1$ 是 $f(g(x))$ 分段点，显然也是间断点，是可去间断点。

5. 提示：$x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$ 是无定义点，当然是间断点，函数在 $x=0$ 的极限存在，所以 $x=0$ 是可去间断点(第一类间断点)，其他点的极限都是无穷大，所以是无穷间断点(第二类间断点)。

6. 提示：无定义的点是 $x=0,1,-1$，当然是间断点，通过求各点的极限或左右极限可知，其中 $x=0$ 是跳跃间断点；$x=1$ 是可去间断点；$x=-1$ 是无穷间断点。

7. 提示：显然函数在 $x=a,x=1$ 是无定义点，当然是间断点，其他点连续。所以若使函数在 $x=0$ 是无穷间断点仅当 $a=0$。若使函数在 $x=1$ 是可去间断点，当然极限存在，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 存在，因为分母极限是0，那么分子极限只能是零，所以 $b=e$。

8. 提示：函数 $F(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}b+x, & x<0,\\ 2x+2, & 0\leqslant x<1,\\ x+2+a, & x\geqslant1,\end{cases}$ 根据 $F(0^+)=F(0^-)$ 知，$b=2$；根据 $F(1^+)=F(1^-)$ 知，$a=1$。

9. 提示：无定义的点是 $x=1,x=-k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$，分段点 $x=0$，由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=0$；$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=-\sin1$，$x=0$ 跳跃间断点；$x=1$ 是振荡间断点，$x=-\dfrac{\pi}{2}$ 是可去间断点，$x=-k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=2,3,\cdots)$ 是无穷间断点。

练习题 1-4 答案与提示

1. (1) 1。提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x}=1$。

(2) 4。提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+\sin t)dt}{\sqrt{1+\tan^2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+\sin t)dt}{\frac{1}{2}\tan^2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+\sin t)dt}{x^2}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)\cdot 2}{2x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 4。$$

(3) $\frac{1}{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2 e^{t^2}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^2 e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}+e^{x^2}} = \frac{1}{2}$。

(4) 2。提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2x^2} = 2。$$

2. (1) ln2。提示：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = 8$，所以 $a=\ln 2$。

(2) $a=b=\sqrt{2}$。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b) = \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$，得到 $a=\sqrt{2}$。将 $a=\sqrt{2}$ 代入极限中，得到

$$b = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-\sqrt{2}x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2+4x-1}+\sqrt{2}x} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}。$$

(3)【方法 1】依题意有：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$，应用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=0$，于是分子的极限一定是零，即 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-2ax-b)=0$，得到 $b=1$，代入极限中，再运用洛必达法则，得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=0$，于是 $a=\frac{1}{2}$。

【方法 2】泰勒公式：$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=0,$$

于是 $1-b=0,\frac{1}{2}-a=0$，所以 $b=1,a=\frac{1}{2}$。

(4) $a=1$。提示：利用 $f(0^+)=f(0^-)$ 即可。

(5) $a=4,b=3$。提示：由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，所以有 $f(1^+)=f(1^-)$，即

$$\lim_{x\to 1^+}f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-ax+b}{1-x} = \lim_{x\to 1^-}f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1+x^2) = 2,$$

由于分母极限是零，所以分子极限一定是零，即 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-ax+b)=0$，从而得到 $1-a+b=0$。对极限运用洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-ax+b}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-a}{-1}=-2+a=2$，解得 $a=4,b=3$。

(6) $a=-3,b=-2,c=1$。提示：由于分母的极限是零，所以分子的极限一定是零，即 $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+ax+b)=0\Rightarrow -1-a+b=0$，应用洛必达法则，得到 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+a}{6x^2+6x}=c$，显然分母极限是零，于是分子极限是零，即 $\lim\limits_{x\to -1}3x^2+a=0\Rightarrow 3+a=0$，即 $a=-3$，将 $a=-3$ 代入极限中，得 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-3}{6x^2+6x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}=1=c$。根据 $a=-3$ 和 $-1-a+b=0$，显然 $b=-2$。

(7) 1 或 e；提示：函数有两个间断点，分别是 $x=0$ 和 $x=1$，根据可去间断点定义，若 $x=0$ 是可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-a}{x(x-1)}$ 存在，根据分母极限是零，得到 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，即 $a=1$，并且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}=-1$ 存在；

若 $x=1$ 是可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 存在，根据分母极限是零，得到 $\lim\limits_{x\to1}(e^x-a)=0$，即 $a=e$，并且 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x(x-1)}=e$ 存在。

(8) $a=-\dfrac{2009}{2010}$，$b=\dfrac{1}{2010}$。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^b-n^b}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^b-1\right]}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{a-b}}{b\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{a-b+1}}{b}=2010$，于是得到 $a-b+1=0$，$\dfrac{1}{b}=2010$。

(9) $a=1, b=0, c=\dfrac{1}{2}$。提示：因为 $c\neq0$，而分子的极限是零，所以分母的极限一定是零，即 $\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0\Rightarrow b=0$（不论 $b>0$ 还是 $b<0$，被积函数不变号，所以积分值都不为零，所以只能 $b=0$），运用洛必达法则得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c$，显然 $a=1, c=\dfrac{1}{2}$。

(10) $a=\dfrac{5}{6}$，$b=\dfrac{1}{6}$。提示：$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$。

$$x-(a+be^{x^2})\sin x=(1-a-b)x+\left(\frac{a+b}{6}-b\right)x^3-\left(\frac{a+b}{120}-\frac{b}{6}+\frac{b}{2}\right)x^5+o(x^5),$$

则得到 $1-a-b=0$，$\dfrac{a+b}{6}-b=0$。

3. (1) 2。提示：$1-\cos^2x=(1-\cos x)(1+\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^2\cdot2\sim x^2$，是二阶无穷小。

(2) 3。提示：$\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)\sim-\dfrac{1}{2}x^3$，是三阶无穷小。

(3) 2。提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{kx^{k-1}}=\dfrac{2}{k}$，$k=2$。

(4) 4。提示：$\left[\int_0^{1-\cos x}(e^{2t}-1)dt\right]'=[e^{2(1-\cos x)}-1]\sin x\sim2(1-\cos x)\sin x\sim x^3$。

(5) 3。提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-4x^4+5x^5}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-4x+5x^2}{x^{k-3}}\Rightarrow k-3=0\Rightarrow k=3$。

(6) 2。提示：$e^{x^2}-\cos x=(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)\sim\dfrac{3}{2}x^2$。

4. $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{2}{3}$，$C=\dfrac{1}{6}$。提示：【方法1】泰勒公式为 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，于是 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+(1+B)x+\left(\dfrac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$，则 $1+B=A$，$\dfrac{1}{2}+B+C=0$，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{B}{2}+C=0$。

【方法2】洛必达法则：由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A}{3x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}[e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A]=0$，即 $1+B-A=0$。而

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x[1+B+2C+(B+4C)x+Cx^2]}{6x}=0,$$

于是有 $1+B+2C=0$，$B+4C=0$。

5. (1) $3\ln2$。提示：由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x(2^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x(2^x-1)}=3$，所以 $f(x)=$

$3x(2^x-1)+\alpha(x)x(2^x-1)$，于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x(2^x-1)+\alpha(x)x(2^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3(2^x-1)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}(2^x-1)=3\ln2。$$

(2) $f(2)=0$；$f'(2)=4\pi$。提示：【方法 1】由 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{\sin\pi x}=4$，$f(x)=4\sin\pi x+\alpha(x)\sin\pi x$，其中 $\lim\limits_{x\to2}\alpha(x)=0$。于是 $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}[4\sin\pi x+\alpha(x)\sin\pi x]=0$，

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{4\sin\pi x+\alpha(x)\sin\pi x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{4\sin\pi x}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{\alpha(x)}{x-2}\cdot\sin\pi x$$
$$=\lim_{x\to2}4\pi\cos\pi x=4\pi。$$

【方法 2】因为连续，则 $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$，$f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{\sin\pi x}\cdot\frac{\sin\pi x}{x-2}=4\pi$。

(3) $-(\ln 2)^2$。提示：由于 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$，所以 $\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)\to0$，$\ln\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]=\ln[2+\alpha(x)]\ln\cos x$，所以 $\frac{f(x)}{x^3}=\frac{4^x-1}{x^3}[e^{\ln(2+\alpha(x))\ln\cos x}-1]$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x^3}[e^{\ln(2+\alpha(x))\ln\cos x}-1]=\ln 2\ln 4\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=-(\ln 2)^2。$$

(4) e^{-2}。提示：$\lim\limits_{x\to0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+2f(x)]}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x)}{\sin x}}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}=e^{2f'(0)}=e^{-2}$。

(5) e^2。提示：$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x+f(x)/x}\times\left[1+\frac{f(x)}{2}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]=3$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$。

考研真题答案

数一真题答案：1. $e^{-\frac{1}{2}}$；2. D；3. B；4. 2；5. 0，$e^{-\frac{1}{6}}$；6. B；7. D；8. B；9. $\frac{1}{6}$；10. A；11. C；12. $e^{-\frac{1}{2}}$；13. 略；14. D；15. $\frac{1}{2}$；16. $-\frac{1}{2}$；17. $a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{3}$；18. $\frac{1}{2}$；19. D；20. A；21. $\frac{1}{4}$；22. -2；23. 0；24. C；25. (i)略，(ii)1。

数三真题答案：1. D；2. $\frac{1}{\pi}$；3. $a=1$，$b=-1$；4. A；5. D；6. $\frac{4}{3}$；7. 2；8. $\frac{3}{2}$；9. 1；10. C；11. $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$，$\pi$；12. B；13. 0；14. B；15. 1；16. $-\frac{1}{6}$；17. C；18. A；19. $\frac{3}{2}e$；20. 2；21. C；22. e^{-1}；23. C；24. B；25. $-\frac{1}{2}$；26. $e^{-\sqrt{2}}$；27. $\frac{1}{12}$；28. D；29. C；30. -2；31. $n=2$，$a=7$；32. A；33. D；34. $\frac{1}{2}$；35. D；36. $-\frac{1}{2}$；37. $a=-1$，$b=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{3}$；38. 6；39. $\sin1-\cos1$；40. $e^{\frac{1}{3}}$；41. A；42. $\frac{2}{3}$；43. $\frac{1}{4}$；44. $a=b=1$；45. 0；46. e^{-1}；47. 1。

注 本书只给出真题答案，其详细解答过程请查阅相关资料。

第 2 章

导数与微分

基本概念

1. 一点可导、一点的导数、左导数、右导数、导函数；
2. 可微、函数在一点的微分、函数的微分；
3. 一点的高阶导数、高阶导函数。

基本结论

1. 连续、可导、可微三者关系；
2. 一点可导充要条件；
3. 求导法则、求导公式；
4. 变限积分函数的求导公式；
5. 莱布尼茨公式；
6. 推导或牢记指数函数、正弦函数、余弦函数、幂函数、一次分式和对数函数的高阶导数公式。

基本方法

1. 计算函数在一点的导数；
2. 计算初等函数的导数；
3. 计算非初等函数的导数：由参数方程确定函数的导数、隐函数的导数、幂指函数的导数、变限积分函数的导数、分段函数的导数和抽象函数的导数；
4. 计算函数的高阶导数、函数在一点的高阶导数。

2.1 导数的求法

一、基本概念

定义 1　导数(可导)　设 $f(x)$在点 x_0 的邻域$U(x_0)$内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**导数**，记作

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad y'\Big|_{x=x_0},\quad f'(x_0)\quad 或\quad y'(x_0)。$$

定义 2 单侧导数 左导数和右导数统称为**单侧导数**。左导数和右导数分别记为 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$，它们的定义分别为

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

注 表示导数、左导数和右导数的极限有三种形式，这是必须掌握的。用定义求一点的导数，讨论极限存在性或求极限值，讨论函数的可导性都将不同程度的涉及这些极限，并利用这些极限。

导数的几何意义：

(1) $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处切线的斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线与 x 轴正向所成的夹角。

(2) $f'(x_0)$ 的大小表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近的变化率。导数的绝对值越大，函数值变化得越快，图像陡峭；导数的绝对值越小，变化得越慢，图像扁平；当导数为零时，曲线在该点的切线平行于 x 轴。

定义 3 微分(可微) 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 有定义，若

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，则称 $f(x)$ 在 x_0 点**可微**，并称 $A\Delta x$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 的**微分**，记作 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，或 $\mathrm{d}f(x_0)=A\Delta x$。

可以证明，自变量的改变量和微分相等；函数值改变量与微分近似相等，即

$$\mathrm{d}x=\Delta x;\quad \Delta y\approx \mathrm{d}y。$$

于是有微分公式：

(1) 函数在一点的微分：$\mathrm{d}y(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$。

(2) 函数的微分：$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x=f'(x)\mathrm{d}x$。

微分的几何意义：微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的点 $M(x_0,f(x_0))$ 的切线的纵坐标相应自变量改变量 Δx 的增量，是函数值改变量的近似值，即 $\mathrm{d}f(x_0)\approx\Delta y$。当 $|\Delta x|$ 越小时，$\mathrm{d}f(x_0)$ 和 Δy 之间的近似程度越好。

导数和微分的区别：

(1) 一点的导数 $f'(x_0)$ 是一个常量，而一点的微分 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ 是一个变量，是一个 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量。

(2) 导数 $f'(x_0)$ 的大小仅与 x_0 有关，而微分 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ 不仅与 x_0 有关，而且还与 Δx 有关。

(3) 一阶微分具有形式不变性，而导数不具有这个性质。因此求导数时应指明对哪个变量(自变量还是中间变量)求导，而求微分则无须指明是对哪个变量求微分。

(4) 导数和微分的几何意义是不同的。

二、基本结论

定理1(可导、可微和连续的三者关系)

(1) 可导和可微是等价的,即可导则可微,反之亦然;

(2) 可导(可微)一定连续,连续未必可导。

定理2(可导的充要条件) $f(x)$在x_0处可导$\Leftrightarrow$左右导数都存在且相等,即

$$f'(x_0)\text{ 存在 }\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)。$$

定理3(求导法则) 若函数$f(x)$和$g(x)$可导,则:

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$;

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$;

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}(g(x)\neq 0)$;

(4) $[f(g(x))]'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$。

定理4(求导公式)

(1) $(C)'=0$;

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

(3) $(\sin x)'=\cos x$;

(4) $(\cos x)'=-\sin x$;

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$;

(10) $(e^x)'=e^x$;

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(14) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

(15) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(16) $(\text{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$。

三、基本方法

题型1 求函数在一点的导数

求函数在一点的导数有两个方法:

方法1 公式法 所谓公式法就是用求导法则和求导公式求出导函数,再求导函数在该点的函数值;

方法2 定义法 所谓定义法就是用一点导数的定义求一点导数。

公式法适合于求初等函数,具体函数的导数;定义法适合于求分段函数在分段点的导数,抽象函数的导数。

例2.1 求下列函数在一点的导数:

(1) 设$f(x)=x\sin x$,求$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(2) 设$f(x)=(x^2-1)g(x)$,$g(x)$在$x=1$连续且$g(1)=2$,求$f'(1)$;

(3) 设$f(x)=x(x-1)\cdots(x-2018)$,求$f'(0)$,$f'(2017)$。

解 (1) 导函数$f'(x)=\sin x+x\cos x$,于是

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=(\sin x+x\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1。$$

(2) 由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 连续,且 $g(1)=2$,则有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)g(x)=2g(1)=4。$$

(3) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\cdots(x-2018)=2018!$;

$$f'(2017)=\lim_{x\to 2017}\frac{f(x)-f(2017)}{x-2017}=\lim_{x\to 2017}x(x-1)\cdots(x-2016)(x-2018)=-2017!。$$

注 例 2.1 的(2)题不能用公式法求导,只能用定义法,这是因为 $g(x)$ 未必是可导的。也就是说,下面解法

$$f'(x)=2xg(x)+(x^2-1)g'(x),\quad f'(1)=2g(1)+(1-1)g'(1)=4$$

是错误的。

例 2.2 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ \sin^2 x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$。

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的分段点,用定义求出该点的左导数和右导数,从而确定这点的导数。

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\mathrm{e}^x=0;$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0。$$

由于 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$,所以 $f'(0)=0$。

注 求分段函数在分段点的导数,一般用定义法,求出函数在这点的左导数和右导数,若左右导数相等,该点的导数存在,且等于左右导数,否则该点导数不存在。

题型 2 求初等函数的导数

从总体上看,每一个初等函数一定是下列三种情况之一:

①基本初等函数;②四则运算函数(加,减,乘和除得到的函数);③复合函数。于是,对初等函数的每一次求导,都需要确定函数是哪种情形。如果是基本初等函数,那就应用导函数的公式;如果是四则运算函数,那就应用四则运算求导法则;如果是复合函数,需要确定复合函数的外函数和内函数。复合函数的导数等于外函数的导数乘以内函数的导数,对外函数求导时,把内函数看作单个变量。

例 2.3 求下列初等函数的导数:

(1) $y=x\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2}$;

(2) $y=\tan\left(a^{2x+1}+\dfrac{\ln x}{x^2+1}\right)$;

(3) $y=\ln\ln\ln\ln x$;

(4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$。

解 (1) 函数是两个函数的和,根据求导法则有

$$y'=(x\arcsin 2x)'+(\sqrt{1-4x^2})'\quad\text{(前者两个函数的积,后者复合函数)}$$

$$= \arcsin 2x + x \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}}(复合函数外函数是幂函数)$$

$$= \arcsin 2x - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}。$$

(2) 函数是复合函数，外函数是 $\tan u$，内函数是 $u=a^{2x+1}+\frac{\ln x}{x^2+1}$，根据复合函数的求导法则有

$$y' = \sec^2\left(a^{2x+1}+\frac{\ln x}{x^2+1}\right)\cdot\left(a^{2x+1}+\frac{\ln x}{x^2+1}\right)'$$

$$= \sec^2\left(a^{2x+1}+\frac{\ln x}{x^2+1}\right)\cdot\left[(a^{2x+1})'+\left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right)'\right],$$

内函数是两个函数的和，前者是复合函数，后者是两个函数的商，于是

$$(a^{2x+1})' = a^{2x+1}\ln a \cdot (2x+1)' = 2a^{2x+1}\ln a,$$

$$\left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(\ln x)' - \ln x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - 2x\ln x}{(x^2+1)^2}。$$

所以

$$y' = \sec^2\left(a^{2x+1}+\frac{\ln x}{x^2+1}\right)\cdot\left[2a^{2x+1}\ln a + \frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x\ (x^2+1)^2}\right]。$$

(3) 函数是复合函数，外函数是对数函数 $\ln u$，内函数是 $u=\ln\ln\ln x$，于是

$$y' = (\ln\ln\ln\ln x)' = \frac{1}{\ln\ln\ln x}\cdot(\ln\ln\ln x)'。$$

而内函数 $\ln\ln\ln x$ 还是一个复合函数，外函数为对数函数 $\ln v$，内函数为 $v=\ln\ln x$，所以

$$(\ln\ln\ln x)' = \frac{1}{\ln\ln x}\cdot(\ln\ln x)'。$$

同样 $\ln\ln x$ 也是一个复合函数，外函数为对数函数 $\ln w$，内函数为 $w=\ln x$，所以

$$(\ln\ln x)' = \frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{x\ln x}。$$

所以

$$y' = \frac{1}{x\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x}。$$

(4) 函数是复合函数，外函数为幂函数 $u^{\frac{1}{2}}$，内函数为 $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是两个函数的和，于是

$$y' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'\right]。$$

函数 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是一个复合函数，外函数为幂函数 $v^{\frac{1}{2}}$，内函数 $v=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 是两个函数的和，于是

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'\right]。$$

函数$\sqrt{x+\sqrt{x}}$是一个复合函数，外函数$w^{\frac{1}{2}}$，内函数$w=x+\sqrt{x}$，是两个函数的和，于是

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)。$$

所以

$$y'=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}。$$

题型 3　求非初等函数的导数

（1）由参数方程确定的函数的导数

参数方程$\begin{cases}y=y(t),\\x=x(t)\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的导数：

一阶导数：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$；

二阶导数：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2}\Big/\dfrac{dx}{dt}$

$=\dfrac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$。

注　求$\dfrac{dy}{dx}$，由于函数$y=y(t)$是关于变量t的函数，不含变量x，所以没有办法对x直接求导，但可对变量t求导，即中间变量求导（将t看作中间变量），再乘以t对x的导数，即$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$，由于$\dfrac{dt}{dx}=1\Big/\dfrac{dx}{dt}$，所以有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}。$$

由参数方程确定的函数的求导原理：函数对自变量的导数，等于此函数对中间变量的导数，除以自变量对这个中间变量的导数，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

其中t是中间变量。事实上，参数方程确定的函数的导数，不论一阶导数还是二阶导数都是利用这一原理。

例 2.4　已知$\begin{cases}x=\cos t^2,\\y=t\cos t^2-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}du,\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 由于 $x'(t)=-2t\sin t^2$，$y'(t)=\cos t^2-2t^2\sin t^2-2t\dfrac{\cos t^2}{2t}=-2t^2\sin t^2$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-2t^2\sin t^2}{-2t\sin t^2}=t。$$

对 x 再次求导，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(t)=\frac{d}{dt}(t)\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{-2t\sin t^2}。$$

例 2.5 已知 $\begin{cases}y=a(\sin t-t\cos t),\\x=a(\cos t+t\sin t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{dx}{dy}$ 和 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

解 由于 $x'(t)=at\cos t$，$y'(t)=at\sin t$，于是

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}\bigg/\frac{dy}{dt}=\frac{at\cos t}{at\sin t}=\cot t,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}(\cot t)=\frac{d}{dt}(\cot t)\bigg/\frac{dy}{dt}=\frac{-\csc^2 t}{at\sin t}。$$

注 此参数方程确定的函数是 $x=x(y)$，x 是因变量，y 是自变量。

从例 2.4 和例 2.5 可知，由参数方程确定的函数，可能 y 是 x 函数，也可能 x 是 y 的函数，究竟谁是谁的函数，有时试题本身给出，如参数方程确定的函数为 $y=y(x)$，自然明确了，否则可以通过所求问题来判定。

（2）隐函数的导数

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 的求法：

方法 1 方程两边求导 将方程两边对变量 x 求导，y 是 x 的函数 $y=y(x)$，再从方程中解出 $\dfrac{dy}{dx}$；

方法 2 公式法 把方程转化为 $F(x,y)=0$ 形式（一端是零，另一端就是 $F(x,y)$）有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F'_y(x,y)}。$$

例 2.6 求下列隐函数的导数：

（1）$e^y=e-xy$，求 y' 和 $y'(0)$；　　（2）$y^3-3xy=1$，求 y''。

解 （1）【方法 1】将方程两边对变量 x 求导，y 是 x 的函数，则有 $e^y\cdot y'=-y-xy'$，解得

$$y'=-\frac{y}{e^y+x}。$$

由于当 $x=0$ 时，有 $e^y=e$，所以 $y=1$。因此

$$y'(0)=-\frac{y}{e^y+x}\bigg|_{x=0,y=1}=-\frac{1}{e}。$$

【方法 2】公式法：令 $F(x,y)=e^y+xy-e$，则 $F_x'(x,y)=y$，$F_y'(x,y)=e^y+x$，于是

$$y'=-\frac{F_x'(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{y}{e^y+x}。$$

（2）对方程两边的变量 x 求导，y 是 x 的函数，则有 $3y^2y'-3y-3xy'=0$，所以有

$$y'=\frac{y}{y^2-x}。$$

于是

$$y''=\frac{y'(y^2-x)-y(2yy'-1)}{(y^2-x)^2}=\frac{y'(y^2-x)-y(2yy'-1)}{(y^2-x)^2}=-\frac{2xy}{(y^2-x)^3}。$$

注 (1) 对 y^n 的变量 x 求导，应是 $(y^n)'=ny^{n-1}\cdot y'$，而不是 $(y^n)'=ny^{n-1}$。这是因为我们是对变量 x 求导，而 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，y^n 实质是复合函数 $[y(x)]^n$，并非是幂函数。如果对 y^n 的变量 y 求导，才是 $(y^n)'=ny^{n-1}$。

(2) 公式法只适合求一阶导数，若求隐函数的二阶导数，只能在一阶导函数的基础上，再对自变量 x 求导，y 是 x 的函数，再用已经求得的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 替换二阶导函数中的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，从而求得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，如例 2.6(2)。

(3) 一般地，隐函数的导数或高阶导数，往往不仅含有自变量 x，更多时含有因变量 y，于是这对求一点导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$ 来说，仅仅将 $x=x_0$ 代入导函数中是不够的，还要确定当 $x=x_0$ 时，y 的取值 $y=y_0$，需要同时将 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入导函数中，方可得到一点的导函数值。而 $y=y_0$ 的确定，我们只要将 $x=x_0$ 代入原方程中，就可以求得 y。

(3) 幂指函数的导数

方法 1 指数求导法：对幂指函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 做恒等变换，将幂指函数转化为指数函数(外函数)，即 $f(x)=u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，于是有

$$f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]。$$

方法 2 对数求导法：对函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 两边取对数，$\ln f(x)=v(x)\ln u(x)$，再对变量 x 求导，得

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=[v(x)\ln u(x)]'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u'(x)}\cdot u'(x),$$

从而得到

$$f'(x)=f(x)\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]。$$

上述两种求导方法没有本质区别，当然也不必记住推出的导数公式，只要掌握求导方法就足够了。

例 2.7 设 $f(x)=x^{\sin x}(x>0)$，求 $f'(x)$。

解 $f'(x)=[\mathrm{e}^{\sin x\ln x}]'=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$。

(4) 多因子相乘除的导数

若函数是多因子相乘除，可以取对数使其变成和或差的形式，从而使求导运算变得简单，此方法又称**对数求导法**。

例 2.8 设 $f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 $f'(x)$。

解 取对数 $\ln|f(x)|=\frac{1}{3}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)$，两边求导

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

所以

$$f'(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)。$$

注 求导公式$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$,请读者自己推导。

(5) 变限积分函数的导数

定理 若 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可导,则变限积分函数 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且

$$F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)。$$

根据定理的形式可知,在**对变限积分函数求导时,变限积分函数的被积函数不能含有变量** x。如果含有变量 x,可以通过下面三种方法,使被积函数中不再含有 x,然后应用求导法则和变限积分函数的求导公式计算导数:

方法1 **提取**:$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)g(x)\mathrm{d}t=g(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$;

方法2 **拆分**:$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}(t+x)f(t)\mathrm{d}t=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}tf(t)\mathrm{d}t+x\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$;

方法3 **换元**:令 $t+x=u$,有 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t+x)\mathrm{d}t=\int_{\psi(x)+x}^{\varphi(x)+x}f(u)\mathrm{d}u$。

注 方法1将 $F(x)$表示两个函数的积,第二个函数是可以利用公式求导的变限积分函数;方法2将 $F(x)$表示为两个函数的和,其中前者是可以利用公式求导的变限积分函数,后者是两个函数的积;方法3将 $F(x)$表示为可以利用公式求导的变限积分函数。

例2.9 设 $f(x)$为连续函数,求下列变限积分函数的导数:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{1}t\sin t\mathrm{d}t$; (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{2x}xf(t)\mathrm{d}t$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{x}(x+t)f(t)\mathrm{d}t$; (4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{1}f(x-t)\mathrm{d}t$。

解 (1) 根据变限积分函数的求导公式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{1}t\sin t\mathrm{d}t=-x^2\sin x^2\cdot 2x=-2x^3\sin x^2;$$

(2) 将 x 提取到积分号前面,成为两个函数的积,从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{2x}xf(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\cdot\int_{1}^{2x}f(t)\mathrm{d}t\right]=\int_{1}^{2x}f(t)\mathrm{d}t+xf(2x)\cdot 2=\int_{1}^{2x}f(t)\mathrm{d}t+2xf(2x);$$

(3) 被积函数中含有 x,不能直接求导,利用拆分、提取方法得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{x}(x+t)f(t)\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}tf(t)\mathrm{d}t\right)\\&=\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)+xf(x)=\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+2xf(x);\end{aligned}$$

(4) 利用换元法,设 $x-t=u$,则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$,于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{1}f(x-t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{x-1}f(u)(-\mathrm{d}u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{x}^{x-1}f(u)\mathrm{d}u\right)=f(x)-f(x-1)。$$

(6) 分段函数的导数

基本方法:在开区间上用公式求导,在分段点上用定义求导。

注 这里所说的开区间，一般是指分段函数的定义域去掉分段点剩余的区间，在这些区间上，一般可以用求导公式和求导法则，求出导函数；而在分段点上，根据导数的定义，求出分段点的左导数和右导数，从而确定分段点的导数。

例 2.10 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}-1, & x<0,\\ \ln(1+x)-x\cos x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并求其导函数。

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-1$，为初等函数，有定义，连续。

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-x\cos x$，为初等函数，有定义，连续。

当 $x=0$ 时，$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续。

综上所述，函数 $f(x)$ 在 R 上连续。

当 $x<0$ 时，即在开区间 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；

当 $x>0$ 时，即在开区间 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\cos x+x\sin x$，

$x=0$ 是分段函数的分段点，根据单侧导数定义得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x\cos x}{x}=0,$$

所以 $f'(0)=0$。于是

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{1+x}-\cos x+x\sin x, & x>0,\end{cases}$$

或

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}-\cos x+x\sin x, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

注 在例 2.10 中，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的右导数，实质就是 $f(x)=\ln(1+x)-x\cos x$ 的导数在 $x=0$ 的函数值，也就是说可以不用定义求 $f'_+(0)$，只需将 $x=0$ 代入函数在 0 点的右侧的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\cos x+x\sin x,\quad x>0$$

中，就得到 $f'_+(0)$。而函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左导数 $f'_-(0)$ 就不能直接代入，这是由于函数在 0 点的左侧的导函数

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\quad x<0,$$

在点 $x=0$ 没有定义，所以只能用定义。

注 这里所说的右侧的导函数与右导数是不同概念，右侧的导函数是右邻域上函数的导函数。同样，左侧的导函数是左邻域上函数的导函数。

用公式法求一点的单侧导数必须满足：

(1) 左导数：函数在这点左连续，左侧导函数在这点有定义，则该点的左导数就是左侧导函数在这点的函数值；

(2) 右导数：函数在这点右连续，右侧导函数在这点有定义，则该点的右导数就是右侧导函数在这点的函数值。

例 2.11 设 $f(x)=\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t$，求 $f'(x)$。

解 首先求 $f(x)$ 表达式。

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x$；

当 $0<x<1$ 时，
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\int_0^x t\mid t-x\mid \mathrm{d}t+\int_x^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t\\&=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3；\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$。所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1。\end{cases}$$

在开区间 $(-\infty,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上，用求导公式求导，得到

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x<0,\\ -\frac{1}{2}+x^2, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x>1。\end{cases}$$

在分段点 $x=0$ 和 $x=1$ 上，先计算单侧导数。将 $x=0$ 和 $x=1$ 分别代入左侧导函数和右侧导函数中，得到

$$f'_-(0)=-\frac{1}{2},\quad f'_+(0)=-\frac{1}{2},\quad f'_-(1)=\frac{1}{2},\quad f'_+(1)=\frac{1}{2};$$

因此 $f'(0)=-\frac{1}{2}$，$f'(1)=\frac{1}{2}$。所以 $f(x)$ 处处可导，导函数为

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x\leqslant 0,\\ -\frac{1}{2}+x^2, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x\geqslant 1。\end{cases}$$

注 将一些非初等函数表示成分段函数或变限积分函数，是求非初等函数的导函数的常用方法。

例 2.12 讨论下列含有绝对值函数的可导性：

(1) $f(x)=|x-1|^{\alpha}(x+1)^{\beta},\alpha,\beta>0,x\in\mathbb{R}$；

(2) $f(x)=|x-1|^{\alpha}(x-1)^{\beta},\alpha,\beta>0,x\in\mathbb{R}$；

(3) $f(x)=|x-1|(x-2)(x-1)^2$，讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处最高有几阶导数。

解 (1) 不可导的点仅仅可能是 $x=1$ 和 $x=-1$。利用导数定义

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x-1|^{\alpha}}{x-1}(x+1)^{\beta},$$

显然，当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，$f'(1)$ 不存在；当 $\alpha>1$ 时，$f'(1)=0$，存在。

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^{\beta}}{x+1}|x-1|^{\alpha},$$

当 $0<\beta<1$ 时，$f'(-1)$ 不存在；当 $\beta\geqslant1$ 时，$f'(1)$ 存在。

(2) 不可导的点仅仅可能是 $x=1$，利用定义

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x-1|^{\alpha}}{x-1}(x-1)^{\beta},$$

根据(1)题结果，当 $\alpha>1$ 或 $\beta\geqslant1$ 时，$f'(1)$ 存在；在 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $0<\beta<1$ 时，当 $\alpha+\beta>1$ 时，$f'(1)$ 存在；当 $\alpha+\beta<1$ 时，$f'(1)$ 不存在。当 $\alpha+\beta=1$ 时，函数在 $x=1$ 处的可导性不确定。

(3) 将函数表示为分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^4-5x^3+9x^2-7x+2, & x\geqslant1,\\ -(x^4-5x^3+9x^2-7x+2), & x<1,\end{cases}$$

则一阶导函数

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3-15x^2+18x-7, & x\geqslant1,\\ -(4x^3-15x^2+18x-7), & x<1;\end{cases}$$

二阶导函数

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2-30x+18, & x\geqslant1,\\ -(12x^2-30x+18), & x<1;\end{cases}$$

三阶导函数

$$f'''(x)=\begin{cases}24x^2-30, & x>1,\\ -(24x^2-30), & x<1.\end{cases}$$

显然函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的三阶导数不存在。因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处最高有二阶导数。

本题用定义求含有绝对值函数在一点的导数，但是如果求一点的二阶导数或三阶导数，只能把函数表示为分段函数，求其函数在分段点上的左导数和右导数，进而确定分段点的高阶导数。

本例说明两个问题：

(1) 带有绝对值函数在绝对值等于 0 的点的求导方法(求一阶导数可以用定义，求高阶导数可以将函数表示为分段函数，再利用分段函数的求导方法)；

(2) 判断含有绝对值函数在函数值等于 0 的点，在什么情况下可导，什么情况下不可导，以及最高有几阶导数。

(7) 计算抽象函数的导数

计算抽象函数的导数,一般有两个方法:

方法1 根据已知条件,利用定义求导数;

方法2 利用极限,将抽象函数表示为含有无穷小量的"具体函数",再利用定义求导。

例 2.13 设函数 $f(x)$在 $x=2$ 连续,且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2f(3-x)-3}{x-1}=-1$,求曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$的切线方程。

解 求切线方程的关键是求切点$(2,f(2))$和斜率 $f'(2)$。根据极限性质可知

$$\lim_{x\to1}[2f(3-x)-3]=0,$$

由于函数 $f(x)$在 $x=2$ 处连续,所以 $2f(2)-3=0$,即 $f(2)=\dfrac{3}{2}$。由于

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-3}{x-2},$$

令 $x=3-t$,则 $x-2=-(t-1)$,且 $x\to2$ 时,$t\to1$,于是

$$f'(2)=-\frac{1}{2}\lim_{t\to1}\frac{2f(3-t)-3}{t-1}=\frac{1}{2},$$

于是所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$。

例 2.14 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶导数,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x+xf(x)}{x^3}=0$,求$f(0),f'(0),f''(0)$。

解 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x+xf(x)}{x^3}=0$,利用极限和无穷小的关系有

$$\frac{2\sin x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha(x),$$

其中$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$,所以 $f(x)=-\dfrac{2\sin x}{x}+x^2\alpha(x)$,于是有

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[-\frac{2\sin x}{x}+x^2\alpha(x)\right]=-2;$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x+x^3\alpha(x)}{x^2}=0;$$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x^2\alpha(x)-\frac{2\sin x}{x}+2}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{x^3\alpha(x)-2\sin x+2x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\alpha(x)+4\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{2}{3}。$$

计算非初等函数的导函数方法综述

(1) 对由参数方程给出的函数、由方程确定的隐函数、幂指函数、变限积分函数等函数有各自固有的求导方法。

(2) 对分段函数的导函数,在开区间上,用公式求导;在分段点上,用定义求导,即用定义分别求出这点的左、右导数,若相等,则表明函数在分段点上可导,其导数就是单侧导数。

(3) 求一点的左右导数,有时也可以用公式。具体来说:如果函数在这点左连续,且左侧(左邻域)的导函数在这点有定义,那么左侧的导函数在这点的函数值就是这点的左导数;同样,如果函数在这点右连续,且右侧(右邻域)的导函数在这点有定义,那么右侧的导函数在这点的函数值就是这点的右导数,这种方法计算的单侧导数,有时比用定义计算左右导数要简单一些!

例如,分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 在分段点 $x=1$ 处是连续的,在 1 的左侧的导函数为 $3x^2$,于是 $f'_-(1)=3x^2|_{x=1}=3$;在 1 的右侧的导函数为 $2x$,于是 $f'_+(1)=2x|_{x=1}=2$,所以,这点导数不存在。

当然,如果左侧、右侧的导函数在这点没有定义,那么只能用定义求单侧导数了! 同时,用这个方法一定是连续的,如果不连续,自然就不可导了。

(4) 求抽象函数在一点的导数,都是用定义法,其本质与求抽象函数的极限是类似的。

练习题 2-1

1. 求下列初等函数的导数:

(1) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

(2) $y=\ln\ln^2\ln^3(2x+1)$;

(3) $y=\sqrt{1-x^2}+x\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\mathrm{e}^{\sin x}\left(x-\dfrac{\ln x}{x}\right)$。

2. 求下列由方程确定函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$;

(2) $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$;

(3) $x^y=y^x$;

(4) $y^2\sin x-\cos(x-y)=0$。

3. 求下列由参数方程确定函数 $y=y(x)$ 的一阶、二阶导数:

(1) $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t^3+1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t。\end{cases}$

4. 求下列幂指函数的导数:

(1) $y=(\sin x)^{\cos x+x}$;

(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^{\frac{1}{x+1}}$。

5. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=\dfrac{(1+\cos x)(1+\ln x)}{\arcsin \mathrm{e}^x}$;

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$。

6. 求下列分段函数的导数:

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x<0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|\geqslant 1,\\ \cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|<1。\end{cases}$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{1-\cos x^2}{x}, & x<0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性。

8. 若 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f'(0)$ 存在，求 $f'(x)$。

9. 设 $f(x)=|x-1|\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=1$ 连续，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，求 $\varphi(1)$。

10. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的最高阶导数的阶数。

11. 求函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点。

12. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2012)$，求 $f'(-2012)$。

13. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & x\leqslant 0, \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，求 a,b 的值。

14. 已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶导数，且 $g(0)=1$。

(1) 确定 a，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续； (2) 求 $f'(0)$。

15. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性。

16. 设对任意的 x 恒有 $f(x+1)=f^2(x)$，且 $f(0)=f'(0)=1$，求 $f'(1)$。

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，求 $f(0)$ 和 $f'(0)$。

18. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x^x-3}{x-1}=-3$，求 $f(1)$ 和 $f'(1)$。

19. 设函数 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 有定义，且对任何非零实数 x,y 恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=1$，试证：对一切 $x\neq 0$，$f'(x)$ 存在，并求 $f(x)$。

20. 计算下列函数的导数：

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$，且对任意的 x，有 $f(3+x)=3f(x)$，求 $f'(3)$；

(2) 设函数 $f(x)=3(x-1)^3+(x-2)^2|x-1|$，求 $f'(x)$，$f''(x)$。

2.2 高阶导数的求法

一、基本概念

定义 4 高阶导数 二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**。

定义 5 n 阶导数

(1) 一点的 n 阶导数

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0};$$

(2) n 阶导函数$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$;$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$。

高阶导数是在前一阶导函数基础上定义的,即对前阶导函数对自变量求导。

二、基本结论

定理 5(莱布尼茨公式) 若 $u(x)$和 $v(x)$具有 n 阶导数,则

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$$
$$=u^{(n)}(x)v(x)+C_n^1 u^{(n-1)}(x)v'(x)+C_n^2 u^{(n-2)}(x)v''(x)+\cdots+C_n^n u(x)v^{(n)}(x)。$$

定理 6(常用函数的 n 阶导数公式)

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$;

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\frac{\pi}{2}\right)$;$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;

(4) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\ a^n(ax+b)^{-(n+1)}$;

(5) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=\left(\frac{a}{ax+b}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ a^n(ax+b)^{-n}$。

定理 7(和与差的 n 阶导数) 若 $f(x),g(x)$具有 n 阶导数,则和与差的 n 阶导数就等于 n 阶导数的和与差,即

$$[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)。$$

注 定理 6 中的 n 阶导数公式是没有必要死记硬背的。我们只需知道:**指数函数、三角函数(正弦和余弦)、幂函数、一次分式、对数函数有 n 阶导数公式**,在具体解题时,可以归纳、推导,得到这些函数的 n 阶导数。

三、基本方法

题型 4 计算高阶导函数和一点的高阶导数

计算高阶导数有 4 种方法:

方法 1 逐次求导法 低阶导数可以采用逐次求导方法,如求 $y'',y''',y^{(4)}$ 等。对一些函数的高阶导数,也可以应用逐次求导,推导或归纳出函数的高阶导数。

方法 2 高阶导数公式法 把函数变形,将其表示为一次分式、指数函数、对数函数和正弦函数、余弦函数的和或差的形式,再用高阶导数公式。

方法 3 莱布尼茨公式法 函数表示为两个函数的积,而每个函数都可以求出 n 阶导数,此种情况可以利用莱布尼茨公式。特别是形如

$$x^k e^x,\quad x^k\sin x,\quad x^k\ln(x+1),\quad e^x\sin x,\quad e^x\cos x$$

函数的高阶导数,一般都应用莱布尼茨公式。

方法 4 泰勒级数法求一点的高阶导数 将函数展成麦克劳林级数或泰勒级数,根据麦克劳林级数或泰勒级数的展开公式,即

麦克劳林级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 或 **泰勒级数** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$，实际展成的麦克劳林级数或泰勒级数与上述公式的麦克劳林级数或泰勒级数是同一级数，所以对应项系数相等，从而得到 $f^{(n)}(0)$ 或 $f^{(n)}(a)$。

例 2.15 用高阶导数公式求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\frac{3x+1}{3x+2}$；　　(2) $y=\ln(x^2-3x+2)$；

(3) $y=\sin^4x+\cos^4x$；　　(4) $y=e^{2x+1}$。

解 (1) 将函数变形，有 $y=\frac{3x+1}{3x+2}=1-\frac{1}{3x+2}$，于是

$$y^{(n)}=-(-1)^n n!3^n\frac{1}{(3x+2)^{n+1}}=(-1)^{n+1}n!3^n\frac{1}{(3x+2)^{n+1}},\quad n\geqslant 1。$$

(2) 将函数变形，有 $y=\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$，于是

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x-1)^n}+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x-2)^n}\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x-2)^n}\right]。\end{aligned}$$

(3) 将函数变形，有

$$\begin{aligned}y&=\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x,\end{aligned}$$

于是

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\cdot4^n\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad n\geqslant 1。$$

(4) 逐次求导，有 $y^{(n)}=2^ne^{2x+1}$。

例 2.16 用莱布尼茨公式求下列函数的高阶导数：

(1) $f(x)=x^2e^x$，求 $f^{(20)}(x)$；　　(2) $f(x)=x\ln(x+2)$，求 $f^{(20)}(0)$。

解 (1) 利用莱布尼茨公式

$$f^{(20)}(x)=(e^x)^{(20)}x^2+C_{20}^1(e^x)^{(19)}(x^2)'+C_{20}^2(e^x)^{(18)}(x^2)''=e^x(x^2+40x+380)。$$

(2) 利用莱布尼茨公式

$$\begin{aligned}f^{(20)}(x)&=[\ln(x+2)]^{(20)}x+C_{20}^1[\ln(x+2)]^{(19)}(x)'\\&=x[\ln(x+2)]^{(20)}+20[\ln(x+2)]^{(19)}\\&=-19!\frac{x}{(x+2)^{20}}+20\times18!\frac{1}{(x+2)^{19}},\end{aligned}$$

所以 $f^{(20)}(0)=\frac{20\times18!}{2^{19}}=\frac{5\times18!}{2^{17}}$。

例 2.17 设 $f(x)=x\arctan x$，计算 $f^{(2018)}(0)$。

解 为了求 0 点的高阶导数，将函数 $f(x)$ 展成麦克劳林级数。因为

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},\quad x\in(-1,1)。$$

于是逐项积分，有

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1),$$

所以

$$f(x)=x\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2},\quad x\in(-1,1)。\tag{1}$$

下面求 $f^{(2018)}(0)$。由于函数 $f(x)$ 展成的麦克劳林级数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\tag{2}$$

因为级数(1)和(2)是同一个级数，于是两个级数对应项的系数相等。在级数(2)中，x^{2018} 的系数是 $\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!}$，在级数(1)中，$x^{2018}$ 的系数是 $\frac{(-1)^{1008}}{2017}$，从而有 $\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!}=\frac{(-1)^{1008}}{2017}$。于是有 $f^{(2018)}(0)=2018\times2016!$。

注 求一点的高阶导数，在例 7.15 有详细的论述！

计算高阶导数方法综述

(1) 对单一类函数，尽可能将它表示为公式中的五类函数的和或差的形式，然后用高阶求导公式计算这个函数的高阶导函数。

(2) 对两类不同函数积组成的函数，如果每个函数都可以求出 n 阶导数，特别其中一个函数是多项式函数，用莱布尼茨公式求高阶导函数。

(3) 求一点的高阶导数，自然可以先求出高阶导函数，然后再求高阶导函数在这点的函数值(将这点代入高阶导函数中)；如果没办法求出高阶导函数，考虑应用级数法，将函数展成泰勒级数或麦克劳林级数，对比函数的泰勒级数或麦克劳林级数公式，求出一点的高阶导数。

练习题 2-2

1. 用高阶求导公式计算下列函数的 n 阶导数：

(1) $\sin^2 x$；　(2) $\frac{1}{x^2-x-2}$；

(3) $\ln(x^2-1)$；　(4) 2^{3x+4}；

(5) $\sin^6 x+\cos^6 x$；　(6) $\frac{x}{x^2+3x+2}$；

(7) $(x+1)\ln(x+1)$；　(8) $\sqrt{2x+1}$。

2. 用莱布尼茨公式求下列函数的 20 阶导数：

(1) $y=x^2\cos x$；　(2) $y=x\sin^2 x$；

(3) $y=xe^{2x}$；　(4) $y=x\ln x$。

3. 用麦克劳林级数求下列函数在 0 点的高阶导数：

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(2009)}(0)$ 和 $f^{(2010)}(0)$；

(2) 设 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$；

(3) 设 $f(x)=(x\cos x)^2$，求 $f^{(2006)}(0)$ 和 $f^{(2008)}(0)$。

2.3 导数与微分考研真题

一、导数与微分考研数一真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于导数和微分的考研数一真题共出了14道题，题型分布在：

1. 求一点的导数：共有4个题，分布在2012年，2016年，2017年和2018年。
2. 分段函数的导数：共有2个题，分布在2005年和2016年。
3. 由参数方程确定的函数的二阶导数：共有2个题，分布在2010年和2013年。
4. 函数和导函数的性质：共有4个题，分布2004年，2006年，2007年和2017年。
5. 有关导数的证明：共有2个题，分布在2008年和2015年。

1 导数与微分考研真题题型分析

1. 求一点导数和高阶导数：2012年考了用定义求一点的导数；2016年和2017年考了用麦克劳林级数求一点的三阶导数(高阶导数)；2018年考了用定义求一点的导数。

2. 求分段函数的导数：2005年考了求分段函数不可导点的个数；2016年考了分段函数的导数。

3. 由参数方程给出函数的导数：2010年和2013年考了由参数方程给出的函数在一点的二阶导数。

4. 函数和导函数和性质：2004年考了极限性质；2006年考了比较函数值改变量与微分大小；2007年考了利用极限求函数值和导数值；2017年考了引入辅助函数，其导函数大于0，从而函数单调增加。

5. 有关导数的证明：2008年考了证明积分上限函数的导数公式；2015年考了证明两函数积的导数公式。

2 导数与微分考研数一真题

1. (2004，二(8)(4分))设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加； (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少；

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$； (D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$。

考点与解法：导数定义和极限性质。利用 $f'(0)$ 的定义和极限的局部保号性。

2. (2005，二(7)(4分))设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导； (B) 恰有一个不可导点；

(C) 恰有两个不可导的点； (D) 至少有三个不可导点。

考点与解法：求函数的不可导点个数。求函数 $f(x)$ 的表达式，求分段点的导数。

3. (2006，二(7)(4分))设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$； (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$； (C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$； (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$。

考点与解法：比较微分和函数值改变量的大小。利用微分的几何意义或用特殊函数。

4. (2007,一(4)(4分))设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$;

(B) 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$;

(C) 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在,则 $f'(0)$存在;

(D) 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则 $f'(0)$存在。

考点与解法:求0点的函数值和导数。根据连续函数定义和极限性质,以及 $f'(0)$的定义。

5. (2008,三(18)(5分)) 设 $f(x)$ 是连续函数,利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$。

考点与解法:证明积分上限函数的导数公式。根据 $F'(x)$的定义和积分中值定理,利用 $f(x)$的连续性。

6. (2010,二(9)(4分)) 设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t},\\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u,\end{cases}$ 求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$。

考点与解法:求由参数方程确定函数的二阶导数。利用参数方程确定的函数的求导原理。

7. (2012,一(2)(4分))设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$,其中 n 是正整数,则 $f'(0)=$________。

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$;　　(B) $(-1)^n(n-1)!$;

(C) $(-1)^{n-1}n!$;　　(D) $(-1)^n n!$。

考点与解法:求一点的导数。利用定义求 $f'(0)$。

8. (2013,二(11)(4分))设$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t,\end{cases}$ 求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$。

考点与解法:求由参数方程确定函数的二阶导数。利用参数方程确定的函数的求导原理。

9. (2015,三(18)(10分))

(i) 设 $u(x),v(x)$可导,利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$。

(ii) 设 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$的求导公式。

考点与解法:证明两个函数积的导数公式。根据定义可以证明两个函数积的导数公式,用归纳法,可得到 n 个函数积的导数公式。

10. (2016,一(2)(4分))已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$的一个原函数是

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1;\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1;\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1;\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1。\end{cases}$

考点与解法：求分段函数的不定积分，或求分段函数的导数。求分段函数的不定积分，取 C 适当的值；或对四个函数求导，且在分段点连续。

11．(2016，二(12)(4 分))设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$ 且 $f'''(0)=1$，求 a。

考点与解法：求一点的三阶导数。利用泰勒级数法，和 $f'''(0)=1$，求出 a 的值。

12．(2017，一(2)(4 分))若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则

(A) $f(1)>f(-1)$；　　(B) $f(1)<f(-1)$；

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$；　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$。

考点与解法：导函数性质。设 $g(x)=f^2(x)$，则 $g'(x)=f(x)f'(x)>0$，表明 $g(x)$ 单调递增，得到 $f^2(1)>f^2(-1)$。

13．(2017，二(9)(4 分))已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f'''(0)$。

考点与解法：求一点的三阶导数。利用泰勒级数法，求 $f'''(0)$；或求三阶导函数 $f'''(x)$，然后求出 $f'''(0)$。

14．(2018，一(1)(4 分))下列函数中，$x=0$ 不可导的是

(A) $f(x)=|x|\sin x$；　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{x}$；

(C) $f(x)=\cos|x|$；　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$。

考点与解法：求函数的在一点的导数。利用定义求上述 4 个函数在 $x=0$ 处的导数。

二、导数与微分考研数三真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于导数和微分的考研数三真题共出了 17 道题，题型分布在：

1．求一点导数和高阶导数：共有 5 个题，分布在 2006 年，2007 年，2012 年，2015 年和 2018 年。

2．分段函数的导数：共有 3 个题，分布在 2012 年，2017 年和 2019 年。

3．非初等函数的导数：共有 2 个题，分布在 2010 年和 2011 年。

4．函数和导函数的性质：共有 6 个题，分布在 2003 年，2004 年，2005 年，2006 年，2007 年和 2017 年。

5．有关导数的证明：有 1 个题，分布在 2015 年。

1　导数与微分考研数三真题题型分析

1．求一点导数和高阶导数：2006 年考了用公式法求一点的三阶导数；2007 年考了求一次分式函数在 0 点的 n 阶导数；2012 年考了用定义求具体函数的在一点的导数；2015 年考了变限积分函数的导数，由此导出函数在一点的函数值；2018 年考了求 4 个函数在 0 点的导数的存在性。

2．分段函数的导数：2012 年考了求分段函数的复合函数在 e 点的导数；2017 年考了求用定积分给出的分段函数的导数；2019 年考了求分段函数的导数。

3．非初等函数的导数：2010 年考了求变限积分函数在 0 点的导数；2011 年考了求极限

函数的导函数；2016年考了求以定积分形式给出的函数的导数，并求函数的最小值。

4. 函数和导数性质的应用：2003年考了确定函数中未知常数的范围；2004年考了函数和导数的性质；2005年考了导数与函数关系；2006年考了比较函数值该变量与微分大小；2007年考了利用极限求函数在0点的函数值和导数；2017年考了引入辅助函数，其导函数大于0，从而函数单调增加。

5. 有关导数的证明：2015年考了证明两个函数积的导数公式。

2 导数与微分考研数三真题

1. (2003，一(1)(4分))设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其导数在 $x=0$ 处连续，求 λ 取值范围。

考点与解法：求函数中未知常数取值范围。求分段函数的导数，利用分段函数在一点连续的充分条件，确定未知常数取值范围。

2. (2004，二(11)(4分))设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$；

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$；

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$；

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$。

考点与解法：函数和导数的性质。利用导数确定函数的大致图像，从而确定相应选项。

3. (2005，二(11)(4分))下列四个命题正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界。

考点与解法：函数与导函数的性质。利用拉格朗日定理建立函数和导数关系，由此取得选项。

4. (2006，一(2)(4分))设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，求 $f'''(2)$。

考点与解法：求一点的三阶导数。利用公式法，求出三阶导函数。

5. (2006，二(7)(4分))题目同上小节3.(2006，二(7)(4分))题。

6. (2007，一(2)(4分))设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在。

考点与解法：求 0 点函数值和 0 点的导数。根据极限和连续的定义以及 $f'(0)$ 的定义。

7. (2007，二(12)(4 分))设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$。

考点与解法：求一点的 n 阶导数。公式法，求出 $y^{(n)}(x)$，再求 $y^{(n)}(0)$。

8. (2010，二(9)(4 分)) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

考点与解法：由方程确定的隐函数在 0 点的导数。公式法，求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，再求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

9. (2011，二(9)(4 分))设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，求 $f'(x)$。

考点与解法：求极限函数的导函数。根据极限，求出函数的表达式，再求导函数。

10. (2012，一(2)(4 分))题目同上小节 7. (2012，一(2)(4 分))题。

11. (2012，二(10)(4 分))设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}$。

考点与解法：求复合函数在 e 点的导数。不必求复合函数，利用复合函数求导公式，即

$$y'=f'[f(x)]f'(x)。$$

12. (2015，二(10)(4 分)) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，求 $f(1)$。

考点与解法：求变限积分函数的导数，导出函数值。对变限积分函数求导，出现 $f(x)$，利用条件 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，导出 $f(1)$。

13. (2015，三(19)(10 分))题目同上小节 9. (2015，三(18)(10 分))题。

14. (2016，三(17)(10 分)) 设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

考点与解法：求分段函数 $f(x)$ 的导数，求函数 $f(x)$ 的最小值。求函数表达式，求分段函数的导数。根据变量 x 的不同范围，求出定积分值，从而得到函数 $f(x)$。

15. (2017，一(3)(4 分))题目同上小节 12. (2017，一(2)(4 分))题。

16. (2018，一(1)(4 分))题目同上小节 14. (2018，一(1)(4 分))题。

17. (2019，三(15)(10 分))已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x\mathrm{e}^x+1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值。

考点与解法：求分段函数的导数，并求极值。在开区间用公式求导，在分段点用定义求导，利用几何判别法，判断不可导的点 $x=0$ 是极大值点，从而求出极大值。

2.4 本章练习题答案与提示

练习题 2-1 答案与提示

1. (1) $y'=3\ln^2(1+\cos x)\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$。

(2) $y=\frac{1}{\ln^2\ \ln^3(2x+1)}2\ln\ \ln^3(2x+1)\frac{1}{\ln^3(2x+1)}3\ \ln^2(2x+1)\frac{2}{2x+1}$。

(3) $y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin\ \sqrt{1-x^2}+x\ \frac{1}{|x|}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin\ \sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{sgn}x$。

(4) $y'=\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)+\mathrm{e}^{\sin x}\left(1-\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$。

2. (1) 方程两端对变量 x 求导,y 是 x 的函数,有 $y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')$,解得 $y'=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$。

(2) 方程两端对变量 x 求导,y 是 x 的函数

$2-\sec^2(x-y)\cdot(1-y')=\sec(x-y)^2(1-y')$, 解得 $y'=1-\frac{2}{\sec(x-y)^2+\sec^2(x-y)}$。

(3) 取对数 $y\ln x=x\ln y$,方程两端对变量 x 求导,$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y'$,解得 $y'=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}$。

(4) 对变量 x 求导,得 $2yy'\sin x+y^2\cos x+\sin(x-y)(1-y')=0$,解得 $y'=-\frac{y^2\cos x+\sin(x-y)}{2y\sin x-\sin(x-y)}$。

3. (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$,$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3}{2}t\right)\Big/2t=\frac{3}{4t}$。

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$,

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big/(1-\cos t)=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$。

4. (1) $y=(\sin x)^{\cos x+x}[(1-\sin x)\ln\sin x+(\cos x+x)\cot x]$。

(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}}-\ln\arctan\sqrt{x}}{(x+1)^2}$。

5. (1) $y'=\frac{(1+\cos x)(1+\ln x)}{\arcsin\mathrm{e}^x}\left[\frac{-\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{(1+\ln x)x}-\frac{1}{\arcsin\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\right]$。

(2) $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$。

6. (1) 在开区间 $(0,+\infty)$ 上,用公式求导:$f'(x)=(x+1)'=1$;在开区间 $(-\infty,0)$ 上,用公式求导:$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,在分段点上,用定义求导:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1,\quad 或\quad f'_+(0)=f'(x)\Big|_{x=0}=(x+1)'\Big|_{x=0}=1;$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=0,$$

所以 $f'(0)$ 不存在,故 $f'(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0。\end{cases}$

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty,-1],\\ \cos\frac{\pi}{2}x, & x\in(-1,1),\\ x-1, & x\in[1,+\infty);\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,-1),\\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x, & x\in(-1,1),\\ 1, & x\in(1,+\infty)。\end{cases}$ 由于 $f'_+(1)=0$,

$f'_-(1)=-\frac{\pi}{2}$,所以 $f'(1)$ 不存在。又由于 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不连续,所以不可导。

7. 显然 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \dfrac{2x^2\sin x^2+\cos x^2-1}{x^2}, & x<0,\end{cases}$ 用定义求分段点的导数，有

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0;$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1-\cos x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=0。$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{2x^2\sin x^2+\cos x^2-1}{x^2}, & x<0。\end{cases}$ 显然 $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在。所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续；在 $x=0$ 是间断点，是第二类间断点或振荡间断点。

8. $f'(0)$。提示：从 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 可以推导出 $f(0)=0$，于是

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)。$$

9. $\varphi(1)=0$。提示：$f'_+(1)=-\varphi(1)$，$f'_-(1)=\varphi(1)$，根据可导，则有 $f'_+(1)=f'_-(1)$。

10. 二阶。提示：

$$f(x)=\begin{cases}2x^3, & x\in(-\infty,0],\\ 4x^3, & x\in(0,+\infty),\end{cases}\quad f'(x)=\begin{cases}6x^2, & x\in(-\infty,0],\\ 12x^2, & x\in(0,+\infty),\end{cases}\quad f''(x)=\begin{cases}12x, & x\in(-\infty,0],\\ 24x, & x\in(0,+\infty)。\end{cases}$$

显然 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的左导数是12，右导数24，不等，所以二阶导函数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 不可导。

11. $x=0$ 和 $x=1$ 不可导。提示：$f(x)=(x-2)(x+1)|x+1||x||x-1|$，根据例2.12可知，$x=0$ 和 $x=1$ 不可导，其他点都可导。

12. $f'(-2012)=2012!$。提示：利用定义

$$f'(-2012)=\lim_{x\to -2012}\frac{f(x)-f(-2012)}{x-(-2012)}=\lim_{x\to -2012}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+2012)}{x+2012}$$
$$=\lim_{x\to -2012}x(x+1)(x+2)\cdots(x+2011)=2012!。$$

13. 函数在$\mathbb{R}$上可导，则函数在 $x=0$ 连续，即 $f(0^-)=f(0^+)$，得到 $b=3$。函数在 $x=0$ 可导，即 $f'_-(1)=f'_+(1)$，得到 $a=2$。

14. (1) $a=g'(0)$；(2) $f'(0)=\dfrac{1}{2}(g''(0)+1)$。提示：若使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则

$$a=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1+1-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)。$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}[g''(0)+1]。$$

15. 提示：根据 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，连续，则 $f(0)=0$，且 $\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$。当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，所以 $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$；当 $x=0$ 时，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=1$，$\varphi'(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续。又由于

$$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=1=\varphi'(0)。$$

所以 $\varphi'(x)$在 $x=0$ 连续，于是 $\varphi'(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续。

16. 2。提示：取 $x=0$，根据 $f(x+1)=f^2(x)$知，$f(1)=f^2(0)=1$。又由于 $f'(0)$存在，所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续，于是

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f^2(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)-1][f(x)+1]}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=2。$$

17. -1；2。提示：由于 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，于是 $f(x)=2x-\dfrac{\sin x}{x}+x\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$。$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[2x-\dfrac{\sin x}{x}+x\alpha(x)\right]=-1$。

18. 2；-4。提示：根据 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+x^x-3}{x-1}=-3$，有 $f(x)=-3(x-1)+(x-1)\alpha(x)-x^x+3$，其中 $\lim\limits_{x\to1}\alpha(x)=0$。

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}[-3(x-1)+(x-1)\alpha(x)-x^x+3]=2,$$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-3(x-1)+(x-1)\alpha(x)-x^x+1}{x-1}$$

$$=-3+\lim_{x\to1}\alpha(x)+\lim_{x\to1}\frac{-x^x+1}{x-1}=-3-\lim_{x\to1}x^x(\ln x+1)=-4。$$

19. $f(x)=\ln|x|$。提示：由 $f(xy)=f(x)+f(y)$，知 $f(1)=0$。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x[1+h/x])-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h/x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h/x)-f(1)}{h/x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{f'(1)}{x}=\frac{1}{x},$$

于是 $f(x)=\ln|x|+C$。根据 $f(1)=0$，知 $f(x)=\ln|x|$。

20. $f'(3)=1$。提示：(1) 利用 $f(3+x)=3f(x)$，知

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3[f(h)-f(0)]}{h}=3f'(0)=1。$$

(2) 将绝对值函数写成分段函数：$f(x)=\begin{cases}2x^3-4x^2+x+1, & x\leqslant1,\\ 4x^3-14x^2+17x-7, & x>1,\end{cases}$ 则其导函数为 $f'(x)=\begin{cases}6x^2-8x+1, & x<1,\\ 12x^2-28x+17, & x>1;\end{cases}$ 二阶导函数为 $f''(x)=\begin{cases}12x-8, & x<1,\\ 24x-28, & x>1。\end{cases}$

练习题 2-2 答案与提示

1. (1) 变形：$\sin^2x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2x$；$(\sin^2x)^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$，$n\geqslant1$。

(2) 变形：$\dfrac{1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，

$$\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{3}n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]。$$

(3) 变形：$\ln(x^2-1)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$；

$$[\ln(x^2-1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+1)^n}\right]。$$

(4) $(2^{3x+4})^{(n)}=3^n(\ln 2)^n 2^{3x+4}$。

(5) 变形：$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x;$$

$$(\sin^6 x+\cos^6 x)^{(n)}=\frac{3}{2}\cdot 4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)。$$

(6) 变形：$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$，

$$\left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{2}{(x+2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]。$$

(7) 令 $f'(x)=(x+1)\ln(x+1)$，则 $f'(x)=\ln(x+1)$，$f''(x)=\frac{1}{x+1}$，

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x+1)^{n-1}},\quad n\geqslant 2。$$

(8) $(\sqrt{2x+1})^{(n)}=(-1)^{n-1}(2n-3)!!\ (2x+1)^{\frac{1}{2}-n}$。

2. (1) $y^{(20)}=x^2(\cos x)^{(20)}+C_{20}^1(x^2)'(\cos x)^{(19)}+C_{20}^2(x^2)''(\cos x)^{(18)}=x^2\cos x+40x\sin x-380\cos x$。

(2) $y=x\sin^2 x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\cos 2x$；

$$y^{(20)}=-\frac{1}{2}[x(\cos 2x)^{(20)}+C_{20}^1(x)'(\cos 2x)^{(19)}]=-2^{19}(x\cos 2x+10\sin 2x)。$$

(3) $y^{(20)}=x(e^{2x})^{(20)}+C_{20}^1(x)'(e^{2x})^{(19)}=2^{20}e^{2x}(x+10)$。

(4) $y^{(20)}=x(\ln x)^{(20)}+C_{20}^1(x)'(\ln x)^{(19)}=-19!x^{-19}+20\times 18!x^{\sqrt{-19}}=18!x^{\sqrt{-19}}$。

3. (1) $f^{(2009)}(0)=0$，$f^{(2010)}(0)=-\frac{1}{2011}$。提示：将函数 $f(x)$ 展成麦克劳林级数，有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$，其麦克劳林级数的一般形式为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，两级数是同一个级数，于是 x^{2009} 项的系数相等，即 $\frac{f^{(2009)}(0)}{2009!}=0$，$x^{2010}$ 项的系数相等，即 $\frac{f^{(2010)}(0)}{2010!}=\frac{(-1)^{505}}{2011!}$，所以 $f^{(2009)}(0)=0$，$f^{(2010)}(0)=-\frac{1}{2011}$。

(2) 当 n 是偶数时，$f^{(n)}(0)=0$，当 n 是奇数时，$f^{(n)}(0)=n!$。提示：函数 $f(x)$ 展成麦克劳林级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$，其麦克劳林级数的一般形式为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，显然当 n 是偶数时，$f^{(n)}(0)=0$，当 n 是奇数时，$f^{(n)}(0)=n!$。

(3) $f^{(2006)}(0)=2005\times 2006\times 2^{2003}$，$f^{(2008)}(0)=-2007\times 2008\times 2^{2005}$。提示：$y=x^2\cos^2 x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x=\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n!}x^{2n+2}$，而 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，两级数中的 x^{2006} 和 x^{2008} 对应项的系数相等，于是有

$$\frac{f^{(2006)}(0)}{2006!}=\frac{(-1)^{1002}}{2004!}2^{2003},\quad \frac{f^{(2008)}(0)}{2008!}=\frac{(-1)^{1003}}{2006!}2^{2005}。$$

考研真题答案

数一真题答案：1. C；2. C；3. A；4. D；5. 略；6. 0；7. A；8. $\sqrt{2}$；9. 略；10. C；11. $\frac{1}{2}$；12. C；

13．0；14．D。

数三真题答案：1．$\lambda>2$；2．D；3．C；4．$2e^3$；5．A；6．D；7．$\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$；8．$-1$；9．$(1+3x)e^{3x}$；10．A；11．$e^{-1}$．12．2；13．略；14．$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & 1\leqslant x,\end{cases}$ $\frac{2}{3}$；15．C；16．D；17．$f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2\ln x+2), & x>0,\\ e^x(1+x), & x<0,\end{cases}$ 极大值 $f(0)=1$。

第3章

一元函数不定积分与定积分

基本概念

1. 原函数、不定积分；

2. 定积分；

3. 积分上限函数、变限积分函数。

基本结论

1. 原函数存在定理、原函数性质；

2. 不定积分性质、公式；

3. 定积分基本公式：牛顿-莱布尼茨公式；

4. 定积分性质和公式(定积分的基本性质、对称区间的定积分、周期函数的定积分、三角函数的定积分)；

5. 变限积分函数的导数。

基本方法

1. 用凑微分、变量代换、分部积分法求不定积分；

2. 求有理函数的不定积分；

3. 求无理函数的不定积分；

4. 求三角函数的不定积分；

5. 求分段函数的不定积分；

6. 用变量代换、分部积分计算定积分；

7. 计算对称区间上的定积分；

8. 计算非初等函数的定积分；

9. 用换元变换计算定积分；

10. 计算反常积分。

3.1 不定积分

一、基本概念

定义 1 原函数 如果 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**，且称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数。

定义 2 不定积分 $f(x)$ 的所有原函数或带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 的**不定积分**。

二、基本结论

定理 1(原函数存在定理) 连续函数一定存在原函数。

事实上，若 $f(x)$ 连续，则积分上限函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数，但要注意的是：连续仅仅是存在原函数的充分条件，并非必要。

定理 2(原函数性质)

(1)如果函数存在原函数，一定有无限多个原函数；

(2) 同一个函数的任意两个原函数最多相差一个常数。

定理 3(不定积分公式)

幂函数的积分公式：

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$；

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$。

二次分式的积分公式：

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

(5) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

(6) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$。

三角函数的积分公式：

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(8) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(9) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

(10) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(11) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

(12) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

(13) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$；

(14) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(15) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

(16) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$。

指数函数的积分公式：

(17) $\int e^x dx = e^x + C$； (18) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$。

根式下是二次多项式的积分公式：

(19) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$； (20) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$；

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C$；

(22) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C$；

(23) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$。

我们能够求的不定积分，大都是运用上述积分公式，因此在计算不定积分时，都是朝着公式形式去变化，最终将被积函数变成：幂函数、指数函数、三角函数、二次分式、根式下是二次多项式的和或差的形式，从而利用公式，计算其不定积分。

三、基本方法

题型1 用凑微分、变量代换、分部积分法求不定积分

求函数的**不定积分**，按积分方法分类，有**三大方法**：凑微分、变量代换、分部积分。

方法1 凑微分（凑微分，利用公式）

原理 若 $\int f(u) du = F(u) + C$，则 $\int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$。

凑微分是积分最基本的方法，也是求不定积分最简单的方法，因此在求不定积分时，我们首先考虑能否用凑微分法，将积分变成公式的形式。要熟练掌握和运用这个方法，需要熟悉函数的凑微分。

常见函数的凑微分

1. 凑成一次函数微分：$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$。

2. 凑成 x^n 的微分：$x^{n-1} dx = \frac{1}{an} d(ax^n + b)$。

3. 凑成倒微分：$\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$。

4. 凑成根微分：$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x})$。

5. 凑成指数函数微分：$a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$，$e^x dx = d(e^x)$。

6. 凑成对数函数微分：$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$。

7. 凑成三角函数微分：$\cos x dx = d\sin x$； $\sin x dx = -d\cos x$；

$\sec^2 x dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx = d\tan x$； $\csc^2 x dx = \frac{1}{\sin^2 x} dx = -d\cot x$。

8．凑成反三角函数微分：$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$；　$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$。

9．凑成整体或局部的微分：$f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$。

例 3.1　用凑微分法求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(4) $\int\frac{x^4}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$；　(6) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；　(8) $\int\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{1}{x(\ln^2 x-1)}\mathrm{d}x$；　(10) $\int\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}x$。

解　(1) $\mathrm{d}x$ 可以凑成一次函数的微分，当然可以凑成分母 $1-2x$ 的微分，从而有

$$\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C;$$

(2) 二次分式，将分母配方，凑微分，利用公式

$$\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)=\arctan(x+1)+C;$$

(3) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}(\arctan x)$，利用公式

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C;$$

(4) x^4 和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 x^5 的微分，当然可以凑成 $\mathrm{d}(x^5+1)$，于是

$$\int\frac{x^4}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\frac{1}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}(x^5+1)=-\frac{1}{15}\frac{1}{(x^5+1)^3}+C;$$

(5) 被积函数是三角函数，凑微分只能是 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 或 $\frac{1}{\sin^2 x}$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}\tan x$ 或 $\mathrm{d}\cot x$，于是为了凑微分，分母提取 $\cos^2 x$，凑微分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\tan^2 x+4)\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{(\tan^2 x+4)}=\frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2}+C;$$

(6) 显然，只能 e^x 和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，当然可以凑成 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)$，于是

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C;$$

(7) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}\sqrt{x}$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+C;$$

(8) 被积函数是三角函数，用 $\sin x$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}\cos x$，从而有

$$\int\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x=-\int\cos^3 x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C;$$

(9) $\frac{1}{x}$和 dx 可以凑成 $d\ln x$，于是

$$\int \frac{1}{x(\ln^2 x-1)}dx=\int \frac{1}{\ln^2 x-1}d\ln x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|+C;$$

(10) 用分子 $\sin x-\cos x$ 和 dx 凑成 $d(\cos x+\sin x)$，于是有

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}dx=-\int \frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}d(\cos x+\sin x)=\frac{1}{\cos x+\sin x}+C。$$

用凑微分法求不定积分综述

凑微分法是计算不定积分最基本、最简单方法，是经过适当的凑微分和被积函数的适当变形，将积分变成公式的形式，再利用公式，所以这一方法又称为**凑微分利用公式**。

熟练掌握这一积分方法，就要熟悉不定积分公式和凑微分公式，不然无法熟练的利用这一积分方法。

在具体应用这一积分方法时，首先观察哪部分和 dx 凑微分，然后考虑剩余部分和哪个积分公式更相近，最后经过适当变化，变成积分公式的形式，再利用积分公式。

方法2　变量代换法

在变量代换中，通常有五种代换：根式代换，指数代换、对数代换、三角代换和反三角代换，其代换的目的是将被积函数化为有理函数、三角函数，或者两类不同函数积的形式。

在变量代换过程中，不仅被积函数改变，而且微元也在改变，这是不容忽视的问题。

1. 三角代换基本形式和方法

一般地，如果被积函数含有二次根式，而且根式下是二次多项式，如 $\sqrt{ax^2+bx+c}$。常常利用配方，将其化为 $\sqrt{u^2\pm p^2}$ 或 $\sqrt{p^2-u^2}$ 的形式，然后作三角代换。

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$，作变量代换 $x=a\sin t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt;$$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$，作变量代换 $x=a\tan t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t,\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt;$$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$，当 $x>a$ 时，作变量代换 $x=a\sec t$，$0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad dx=a\sec t\tan t\,dt。$$

当 $x<-a$ 时，作负变换，令 $x=-u$，则 $u>a$，再利用 $x>a$ 时的积分结果，得到 $x<-a$ 时的不定积分。具体见例3.2中的(2)题。

例3.2　求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\,(a>0)$。

解　(1) 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t\,dt$，于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t}{\sin t\cos t}dt=\int \frac{1}{\sin t}dt=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C。$$

(2) 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t\cdot a\sec t\tan t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\tan^2 t}{a^2\sec^3 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t+C=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C。$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，则 $u>a, \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=-\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^4}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\right)^3+C=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C。$$

所以 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C$。

2. 指数代换

如果被积函数含有指数函数，若不能用凑微分，又不适用分部积分，一般是做指数代换，将被积函数化为有理函数。

例 3.3 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$。

解 (1) 令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t, \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\int\frac{t}{t+1}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=t-\ln|1+t|+C=\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C。$$

(2) 令 $\sqrt{\mathrm{e}^x+1}=t$，则 $\mathrm{e}^x=t^2-1, \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t, \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right|+C。$$

注 变量代换的代换方法并非唯一的。例 3.3 的第(2)题令 $\sqrt{\mathrm{e}^x+1}=t$，当然也可以令 $\mathrm{e}^x=t$。变量代换的目标是把不容易求的积分经过变量代换，化为我们熟悉的**有理函数积分或三角函数积分**。

3. 对数代换

如果被积函数含有对数函数，若不能凑微分，又不适用分部积分，一般是做对数代换，使被积函数化为有理函数或两类不同函数积的形式，然后应用分部积分。

例 3.4 求下列不定积分：

(1) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$。

解 令 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t, \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，于是

(1) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^2\mathrm{e}^{-t}+\int 2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^2\mathrm{e}^{-t}-2t\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-t}+C$

$$=-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C。$$

(2) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\int\cos t e^t\mathrm{d}t=\cos t e^t+\int\sin t e^t\mathrm{d}t=\cos t e^t+\sin t e^t-\int\cos t e^t\mathrm{d}t$,

于是$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\cos t e^t+\sin t e^t)+C=\frac{1}{2}x(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$。

注 对于被积函数是不同两类函数的积或复合函数的不定积分，即使通过变量代换一般也不会把被积函数化为单一类的函数，往往还是两类不同函数的积，但这样的被积函数有利于分部积分。

4. 反三角代换

如果被积函数含有反三角函数，若不能凑微分，又不适用分部积分，一般是做反三角函数代换，使被积函数化为有理函数、无理函数和三角函数等形式。

例 3.5 求下列不定积分：

(1) $\int\sin(\arctan x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解 (1) 令 $\arctan x=t$，则 $x=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sin(\arctan x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}\cos t=\frac{1}{\cos t}+C=\sqrt{1+x^2}+C。$$

(2) 令 $\arccos x=t$，则 $x=\cos t(0<t<\pi)$，$\mathrm{d}x=-\sin t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int\frac{t\sin t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t=-\int\frac{t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-t\tan t+\int\tan t\mathrm{d}t$$

$$=-t\tan t-\ln|\cos t|+C=-\arccos x\cdot\tan(\arccos x)-\ln|x|+C。$$

在变量代换中，我们给出了四种变量代换方法。事实上，还有一种常用的方法：根式代换，为了避免重复论述，我们把这个方法放到无理函数积分一节去研究，因此说变量代换共有五种代换方法，即：根式代换，指数代换，对数代换，三角代换，反三角代换。

用变量代换法求不定积分综述

(1) 若不能用凑微分法，也不具备分部积分特征(两类不同函数的积)，就要考虑变量代换。

(2) 五种代换就是我们熟悉的五种基本初等函数的代换。在某种意义上说，哪部分影响(阻碍)了积分运算，就代换那部分。

(3) 在变量代换时，究竟采用哪种代换，是由被积函数决定的。一般情况下，含有根式，根式下一次多项式或一次分式，就用根式代换；如果根式下是二次多项式，就用三角代换；如果含有对数函数、指数函数、反三角函数，就分别用对数代换、指数代换和反三角代换。这个过程需要考虑两个因素：被积函数的变化和微元的变化，确保新的积分的被积函数是我们熟悉的形式，有利于积分。

(4) 变量代换的代换方式并非唯一的，同时变量代换方法也并非是必须的，有时可以不作变量代换，用凑微分或分部积分来解决。这也无所谓，只要能够求出不定积分，至于用何种方法，何种代换并不是最重要的，求出就好，何必纠结在哪个方法更好！

方法 3　分部积分

分部积分原理　$\int f(x)\mathrm{d}x=\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$。

基本方法　将被积函数 $f(x)$分成两部分，一部分为 $u(x)$，另一部分为 $v'(x)$，$v'(x)$和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}v(x)$。$u(x)$更多的是选取：x^k，$\ln x$，$\arcsin x$ 等，这样等式右端的积分中的 $u'(x)$一

般是常数、幂函数、无理函数等，是有利于积分的形式，同时还要保证剩余部分 $v'(x)$ 很容易求其原函数 $v(x)$，凑成 $\mathrm{d}v(x)$。

例 3.6 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{\ln x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$。

解 (1) 被积函数 $\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$ 是两类不同函数的积，于是考虑分部积分。选择 x 作为 $u(x)$，剩余部分 $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $-\mathrm{d}\,\frac{1}{\sin x}$，于是有

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int x\cdot \mathrm{d}\,\frac{1}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| + C。$$

(2) 被积函数 $\frac{\ln x}{(x+3)^2}$ 是两类不同函数的积，于是考虑分部积分。选择 $\ln x$ 作为 $u(x)$，剩余部分 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $-\mathrm{d}\,\frac{1}{x+3}$，于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x &= -\int \ln x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+3}\right) = -\frac{\ln x}{x+3} + \int \frac{1}{x(x+3)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln x}{x+3} + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x+3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C。\end{aligned}$$

用分部积分法求不定积分综述

分部积分的基本思想是将被积函数转化为单一类函数：有理函数、无理函数或三角函数。因此，一般地，如果被积函数是两类不同函数的积，要考虑分部积分。特别是被积函数是如下形式：

$$x^k\sin x；\quad x^k\arcsin x；\quad x^k e^x；\quad x^k\ln x；\quad e^x\sin x，$$

只能用分部积分。

分部积分的关键是将被积函数 $f(x)$ 分成两部分，$u(x)$ 和 $v'(x)$，哪部分作为 $u(x)$ 要考虑三个因素：

(1) $u'(x)$ 更简单，有利于积分；

(2) 容易求出 $v'(x)$ 的原函数 $v(x)$；

(3) 容易计算不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$。

求不定积分，有三大方法，分别是：凑微分、变量代换和分部积分。如果按照被积函数分类，还可分为：有理函数积分、无理函数积分、三角函数积分。这是因为即使有其他函数的不定积分，大都可以通过变量代换转化为这三类函数的积分，因此如果熟练掌握这三类函数的积分，就可以从容应对各类不定积分问题。

题型 2 求有理函数的不定积分

设 $P_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式，$Q_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式，则称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 是有理函数，且当 $n<m$ 时，称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为真分式；当 $n\geqslant m$ 时，称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为假分式。

1. 基本方法

将有理函数积分表示为(转化成)可以利用公式的积分。具体来说,就是**将有理函数积分表示为整式(多项式)、一次分式以及二次分式的积分的和**。

根据代数理论:

(1) 假分式 = 整式(多项式) + 真分式;

(2) 真分式 = 若干一次分式 + 若干二次分式。

一次分式与二次分式共有六种形式,分别是:

一次分式:$\dfrac{1}{x-a}$,$\dfrac{1}{(x-a)^n}$;

二次分式:$\dfrac{1}{x^2+px+q}$,$\dfrac{x+b}{x^2+px+q}$,$\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$,$\dfrac{x+b}{(x^2+px+q)^n}$。

注 这里的二次分式中的 x^2+px+q 是不能再分解,即 $p^2-4q<0$。

六类一次分式和二次分式积分的基本方法:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x=\ln|x-a|+C$;(凑微分,利用公式)

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$;(凑微分,利用公式)

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$;(配方,凑微分,利用公式)

(4) $\displaystyle\int\frac{x+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$;

(用一次项 + 常数,凑成分母的微分,剩余部分与(3)的形式相同)

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$;(配方,利用递推公式)

(6) $\displaystyle\int\frac{x+b}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$。

(用一次项+常数,凑成分母的微分,剩余部分与(5)的形式相同)

公式中的"→"表示原积分可以转化为这种形式的积分,各项最多相差一个常数倍。

递推公式 $\displaystyle I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$。

特别地,当 $n=2$ 时递推公式化为 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right)$。

当然,对上面公式,可以从递推公式获得,也可以用变量代换方法得到。

事实上,令 $x=\tan t$,则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}&=\int\frac{a\sec^2t\mathrm{d}t}{(a^2\tan^2t+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a^3}\int(1+\cos2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)+C。\end{aligned}$$

2. 有理函数的分解

(1) 把假分式化为真分式:假分式=多项式(整式)+真分式。例如

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1},$$

(2) 把真分式表示为若干一次分式与二次分式和的形式的具体方法：

方法 1　待定系数法：将分母分解成若干一次因式与二次因式的积的形式（二次因式不能再分解），依据分母的一次因式和二次因式，将真分式表示为几个一次分式和二次分式和的形式。例如

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+a)^3(x^2+px+q)^2}\\&=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+a)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}+\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^2},\end{aligned}$$

其中 A,B,C,D,E,F,G 是待定常数，$p^2-4q<0$。

为方便起见，$\frac{B}{(x+a)^2}$，$\frac{C}{(x+a)^3}$ 也称为一次分式，$\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^2}$ 也称为二次分式。

在确定待定系数时，可以对上述等式去分母，变成两个多项式恒等，利用多项式恒等，对应项系数相等，建立含有待定系数的方程组，解方程组，从而确定待定系数值。

方法 2　"凑"的方法：

将真分式用"凑的方法"分解：

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)}=\frac{1+x^2-x^2}{x^3(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}。$$

若用待定系数法分解，一般形式为

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{1+x^2},$$

这样需要求五个待定系数。首先去分母，等式两边同乘以 $x^3(1+x^2)$ 得到

$$1=Ax^2(1+x^2)+Bx(1+x^2)+C(1+x^2)+(Dx+E)x^3,$$

根据多项式恒等，对应项系数相等得到

$$\begin{cases}1=C, & \text{(常数项相等)}\\0=B, & \text{(一次项系数相等)}\\0=C+A, & \text{(二次项系数相等)}\\0=B+E, & \text{(三次项系数相等)}\\0=A+D, & \text{(四次项系数相等)}\end{cases}$$

解得 $C=1,B=0,A=-1,E=0,D=1$。

通过上面例子可知：用待定系数法将真分式分解成若干一次分式与二次分式的和，计算量很大，在某种意义上说实在是无奈之举，所以通常情况下，大都是用"凑"的方法。

例 3.7　求下列有理函数的不定积分：

(1) $\int\frac{x^2+x+1}{x}dx$；　(2) $\int\frac{x+2}{(x+1)x}dx$；

(3) $\int\frac{x^3}{x+1}dx$；　(4) $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$；

(5) $\int\frac{1}{x^3+3x^2+2x}dx$；　(6) $\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$；

(7) $\int\frac{x^2}{(x-1)^5}dx$；　(8) $\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx$；

(9) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$；　(10) $\int\frac{1}{x^3+1}dx$。

解 (1) 将被积函数拆分,这是求积分的常用方法。于是

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\mathrm{d}x = \int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+C;$$

(2) 利用凑的方法将被积函数分解(当然可以用待定系数法分解),再拆分

$$\int \frac{x+2}{(x+1)x}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1+1}{(x+1)x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + C;$$

(3) 利用凑的方法,将假分式变成整式与一次分式的和的形式,再拆分

$$\int \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int (x^2-x+1)\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C;$$

(4) 利用凑的方法分解被积函数,于是有

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C;$$

(5) 对被积函数的分母因式分解,即 $x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$,用待定系数法分解被积函数

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

消去分母得到

$$1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$
$$= (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A。$$

多项式恒等,对应项系数相等,于是有

$$A+B+C=0,\quad 3A+2B+C=0,\quad 2A=1,$$

解得 $A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{1}{2}$。于是有

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C;$$

(6) 对这种形式的有理函数的积分,首先用分子一次项 $x+$常数,凑成分母微分,再减去多出部分的积分,从而有

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C;$$

(7) 当分母是单项时,很容易拆分,于是令 $t=x-1$,则 $x=t+1, \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,将分母变成幂函数形式,有

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^5}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+t)^2}{t^5}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t^5} + 2\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4t^4} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{2t^2} + C$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)^4}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C;$$

(8) 这是一个二次分式的基本形式,于是配方变成公式的形式,再利用递推公式,有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx&=\int\frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}d(x+1)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\int\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)\right]+C;\end{aligned}$$

注 本题也可以不用递推公式,可以利用三角代换,即令 $x+1=\tan t$,也是一个可行的方法,所以是否记住这个递推公式,显得并不十分重要。

(9) 由于 $x^{11}=x^8\cdot x^3$,而 x^3 和 dx 可以凑成 $\frac{1}{4}dx^4$,这样可以化成二次分式的积分,从而达到降次的目的。于是令 $x^4=u$,则 $du=4x^3dx$,从而有

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx&=\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}du=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)du\\&=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln(1+u)-\ln(2+u)+C\\&=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}\ln(1+x^4)-\ln(2+x^4)+C;\end{aligned}$$

(10) 用凑的方法,分解被积函数(当然也可以用待定系数法分解)

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3+1}dx&=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^3+1}dx=\int\frac{1-x}{x^2-x+1}dx+\int\frac{x^2}{x^3+1}dx\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx+\int\frac{x^2}{x^3+1}dx\\&=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C。\end{aligned}$$

求有理函数不定积分方法综述

(1) 计算有理函数积分的第一步,考虑能否用"凑微分"利用公式,这是最简单的方法。如果不可,考虑是否有必要做变量代换,最后考虑将被积分函数分解为一次分式和二次分式和的形式,拆分,计算每个不定积分。

(2) 对被积函数的分解,大都采用"凑"的方法,如例 3.7 的(2)~(4)题,当然,在没有看出如何去凑时,也只能用待定系数法去分解,如例 3.7 的(5)题和(10)题。

(3) 对一些有理函数积分采用适当的变量代换也是必要的,如例 3.7 第(7)题和(9)题,这样有利于拆分和降低变量次数。

(4) 掌握有理函数积分的基本思想和基本方法是至关重要的,一方面是因为有理函数积分占积分很大比例,而且还有很多积分通过变换(凑微分、变量代换、分部积分),最终转化为有理函数积分;另一方面,有理函数的表现形式不尽相同,掌握了有理函数积分的基本方法和思想,就可以确定对被积函数怎样变化,朝着什么方向变化。

题型 3 求无理函数的不定积分

计算无理函数的积分,一般用凑微分、变量代换:

方法1 凑微分 变形、凑微分，再利用积分公式；

方法2 根式代换 化无理函数积分为有理函数积分；

方法3 三角代换 化无理函数积分为三角函数积分。

通常情况下，根式下是一次多项式或一次分式，用根式代换；根式下是二次多项式，用三角代换。

例3.8 用凑微分法求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}x$。

解 (1) 将被积函数变形，化为两个无理函数的和，凑微分

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{1+x}+C。$$

(2) 凑微分，变形，利用公式

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x&=\int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{1-x}(-2)\\&=2\int \frac{1}{(\sqrt{1-x})^2-\sqrt{2}^2}\mathrm{d}\sqrt{1-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+C。\end{aligned}$$

(3) 配方，变成$\sqrt{u^2\pm a^2}$的形式，利用公式

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x&=\int \sqrt{(x+1)^2+2^2}\,\mathrm{d}(x+1)\\&=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C。\end{aligned}$$

(4) 用分子的一次项 x+常数，凑成分母根式下的微分，多出部分配方，凑微分，利用公式

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}x-\int \frac{2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}(5-4x-x^2)-\int \frac{2}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}\mathrm{d}x\\&=-\sqrt{5-4x-x^2}-2\int \frac{1}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}\mathrm{d}(x+2)\\&=-\sqrt{5-4x-x^2}-2\arcsin\frac{x+2}{3}+C。\end{aligned}$$

注 本题表明：并非所有的无理函数积分都采用变量代换，有一些积分仅用变形，凑微分的方法就可以解决。因此在计算有理函数的积分时，首先考虑凑微分。

当然，(3)题是配方利用公式，如果没有掌握这个公式，只能是配方，用三角代换，令 $x+1=2\tan t$。同样，(4)题是用分子的 x 凑成分母根式下的微分，当然也可以利用配方，将积分化为

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\sqrt{3^3-(x+2)^2}}\mathrm{d}x$$

的形式，再作变量代换，令 $x+2=3\sin t$。

例 3.9 用变量代换法求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$。

解 (1) 根式代换：令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int (t^2-1)\cdot t\cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|+C。$$

(2) 根式代换：令 $x=t^6$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=6\int \frac{t^8-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int \left[(t^4+1)(t^2-1)+\frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\right)+C$$

$$=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{3}{6}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\arctan x^{\frac{1}{6}}+C。$$

(3) 根式代换：变形得到

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)^3}}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x。$$

于是令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$，因此

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{(t^3-1)^2}{4t^3}\cdot t\cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t=\int -\frac{3}{2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C。$$

(4) 三角代换：当 $x>1$ 时，令 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C；$$

当 $x<-1$ 时，令 $x=-u$，则 $u>1$，于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u=\arccos\frac{1}{u}+C=\arccos\frac{1}{-x}+C；$$

所以 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\arccos\frac{1}{|x|}+C$。

(5) 三角代换：令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

$$=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C。$$

(6) 三角代换：令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}(\sin t+\cos t)$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{a^2-x^2}|+C。$$

注 例3.9的(6)题的三角函数积分部分，在本章题型6给出详尽说明。

求无理函数的不定积分方法综述

求无理函数不定积分有两大方法：凑微分和变量代换(根式代换、三角代换)。

(1) 对无理函数积分，首先考虑能否用凑微分方法计算，或考虑化简无理函数，把被积函数化为无理函数积分公式形式，如例3.8。充分利用**根式下是二次多项式的积分公式**。

(2) 如果不能用凑微分法计算，那只能应用变量代换。如果根式下是一次多项式或一次分式，作根式代换，如例3.9的(1)和(2)题，使被积函数变成有理函数；如果根式下是二次多项式，配方后化为 $\sqrt{a^2\pm x^2}$ 或 $\sqrt{a^2-x^2}$ 形式，再作三角代换，化为三角函数的积分，如例3.9的(4)～(6)题。如果不是这两大类情形，那就应该对被积函数作适当变形，如例3.9的(3)题，当变成上述情形时，再考虑变量代换。

题型4 求三角函数的不定积分

求三角函数的不定积分的方法有：①凑微分；②降次；③简化分母；④万能公式。

方法1 凑微分、化为有理三角函数积分

(1) $\int f(\sin x)\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)(1-\sin^2 x)^n\mathrm{d}\sin x$；

(2) $\int f(\cos x)\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)(1-\cos^2 x)^n\mathrm{d}\cos x$；

(3) $\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$；

(4) $\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$。

上述凑微分方法，如果经过变量代换，则将三角函数积分化为有理函数的积分，如果不做变量代换，我们称之为**有理三角函数的积分**，其中 $f(x)$ 是有理函数。

公式(1)表明：如果被积函数是关于正弦、余弦的函数，而余弦是奇次幂的，则可以凑成

正弦的微分，且被积函数可以表示为关于正弦的函数，如果令 $t=\sin x$，则三角函数积分转化为有理函数的积分；

公式(2)表明：若被积函数是关于正弦是奇次幂的，则可以凑成余弦的微分，且被积函数可以表示为余弦函数，如果令 $t=\cos x$，则三角函数积分转化为有理函数的积分。

公式(3)和公式(4)雷同。

例 3.10 求下列三角函数的不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(\sin x+\cos x)}$；　　(2) $\displaystyle\int\sin^3 x\cos^4 x\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\sec^6 x\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}\mathrm{d}x$。

解 (1) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(\sin x+\cos x)}=\int\frac{1}{\cos^2 x(\tan x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\tan x+1}\mathrm{d}\tan x$$
$$=\ln|\tan x+1|+C。$$

(2) $$\int\sin^3 x\cos^4 x\mathrm{d}x=-\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}\cos x=\int(\cos^2 x-1)\cos^4 x\mathrm{d}\cos x$$
$$=\int\cos^6 x\mathrm{d}\cos x-\int\cos^4 x\mathrm{d}\cos x=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C。$$

(3) $$\int\sec^6 x\mathrm{d}x=\int\sec^4 x\mathrm{d}\tan x=\int(1+\tan^2 x)^2\mathrm{d}\tan x$$
$$=\int(1+2\tan^2 x+\tan^4 x)\mathrm{d}\tan x=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C。$$

(4) $\displaystyle\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\sin x\mathrm{d}x=-\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}\cos x$，令 $\cos x=t$，于是

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{t^4}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C。$$

注 化三角函数积分为有理三角函数或有理函数的积分，是计算三角函数积分的常用、有效的方法。例 3.10 是利用凑微分方法，把三角函数积分变成有理三角函数或有理函数的积分。(1)～(3)题，是把积分转化为有理三角函数的积分，(4)题，是把积分转化为有理函数的积分。

方法 2 降次

(1) 直接降次 利用倍角公式、积化和差公式降次：

(i) 倍角公式：$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$；$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$；$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$。

(ii) 积化和差：$\sin\alpha x\cos\beta x=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$；

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]；$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]。$$

例 3.11 求下列三角函数的不定积分：

(1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \sin 2x\cos 4x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$。

解 (1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$。

(2) $\int \sin 2x\cos 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 6x - \sin 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$。

(3)
$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int\left[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x + C。\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{16}\int(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cos 2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{16}\int\left[1-\cos 4x+\cos 2x-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{192}\sin 6x+C。\end{aligned}$$

(2) 间接降次 利用公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$降次。

例 3.12 求下列三角函数的不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x}$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$。

解 (1)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x} &= \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \ln|\sec x+\tan x| - \frac{1}{\sin x}+C。\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} = \int\frac{\mathrm{d}x}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \\ &= \int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\ln|\csc x-\cot x|+C。\end{aligned}$$

注 例 3.12 中的(1)和(2)，分母次数相当于 3 次和 4 次，分子利用公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$拆分后，分子和分母次数的差为 1 和 2，于是我们把这个方法称为间接降次。

方法 3　简化分母　把分母的和或差的形式化为积的形式：

(1) $\int \frac{R(\sin x,\cos x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{R(\sin x,\cos x)(1-\cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{R(\sin x,\cos x)}{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{R(\sin x,\cos x)(1+\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$。

例 3.13　求下列三角函数的不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$。

解　(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C。$$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}+1}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C。$$

方法 4　万能公式

作变量代换，将三角函数积分转化为有理函数积分。

令 $x=2\arctan t$，则 $t=\tan\frac{x}{2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}。$$

例 3.14　求 $\int \frac{1+\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(1+\cos x)}\mathrm{d}x$。

解　令 $x=2\arctan t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，于是

$$\int \frac{1+\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int \frac{t^2+t}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=t+\ln|t^2-t+1|+C$$

$$=\tan\frac{x}{2}+\ln\left|\tan^2\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}+1\right|+C。$$

注　之所以把上述公式称为万能公式，是因为这种变换，可以把常见的三角函数积分都转化为有理函数的积分。同时，我们还会发现，万能公式比较适合次数较低的三角函数积分，一般是一次的，或是二次的。不然，通过万能公式变换，得到的分式，其分子或分母次数较高，这样的有理函数积分，有时没有更好的处理方法。因此，如果有其他办法，最好不用万能公式，万能公式的实质是一种特定的变量代换。

求三角函数的不定积分方法综述

三角函数积分大致有四个方法：

(1) 求三角函数积分首先考虑凑微分法，一是凑微分，直接利用公式；二是凑微分，将其转化为有理三角函数积分，或经过变量代换转化为有理函数的积分；

(2) 如果不能应用凑微分法,可考虑降次,降为一次的三角函数,然后凑微分利用公式;

(3) 如果被积函数是分式形式,可考虑简化分母,拆分;

(4) 如果被积函数是分式形式,分子和分母关于三角函数的次数较低,一次或二次的,可考虑应用万能公式。

题型5 求分段函数的不定积分

例3.15 求不定积分$\int \max\{x,1\}\mathrm{d}x$。

解 由于$\max\{x,1\}=\begin{cases}1, & (-\infty,1],\\ x, & [1,+\infty),\end{cases}$于是

$$\int \max\{x,1\}\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & (-\infty,1],\\ \dfrac{1}{2}x^2+C_2, & [1,+\infty)。\end{cases}$$

根据原函数的连续性,$f(1^+)=f(1^-)$,则$1+C_1=\dfrac{1}{2}+C_2$,于是$C_2=C_1+\dfrac{1}{2}$,故

$$\int \max\{x,1\}\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & (-\infty,1],\\ \dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}+C_1, & [1,+\infty)。\end{cases}$$

求分段函数的不定积分方法综述

求分段函数的不定积分,首先求出每段函数的不定积分,然后利用原函数的连续性,分段点的左右极限相等,确定各段不定积分的任意常数的关系,最后用一个任意常数表示其他任意常数,进而得到分段函数的不定积分。

练习题3-1

1. 求下列有理函数的不定积分:

(1) $\int \dfrac{x^4}{x^2-1}\mathrm{d}x$; (2) $\int \dfrac{4}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \dfrac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x$; (4) $\int \dfrac{1}{x^3+x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \dfrac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$; (6) $\int \dfrac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \dfrac{x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$; (8) $\int \dfrac{1}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$; (10) $\int \dfrac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x$。

2. 求下列无理函数的不定积分:

(1) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$; (4) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \dfrac{1}{1-\sqrt{4x-x^2-3}}\mathrm{d}x$; (6) $\int \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$；

(8) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$；

(9) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(10) $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$。

3. 求下列三角函数的不定积分：

(1) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$；

(2) $\int \sin^4 x dx$；

(3) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$；

(4) $\int \sin 5x\cos 3x dx$；

(5) $\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx$；

(6) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$；

(7) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$；

(8) $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx$；

(9) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(10) $\int \cos\ln x dx$。

4. 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\sec^2 x dx$；

(2) $\int x\cos^2 x dx$；

(3) $\int x^2\arctan x dx$；

(4) $\int \ln(1+x^2)dx$；

(5) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$；

(6) $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$；

(7) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$；

(8) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$。

3.2 定积分

一、基本概念

计算曲边梯形的面积：分割、微元近似值、累加、取极限。

设曲边梯形由 $x=a,x=b,y=f(x)$ 和 x 轴围成，如图 3-1 所示。

(1) 分割：用分法 T 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形。

(2) 微元近似值：把第 k 个小曲边梯形看成长方形，宽为 Δx_k，其长为在$[x_{k-1},x_k]$上任取一点 ξ_k 的函数值$f(\xi_k)$，则第 k 个小曲边梯形面积为

$$\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k。$$

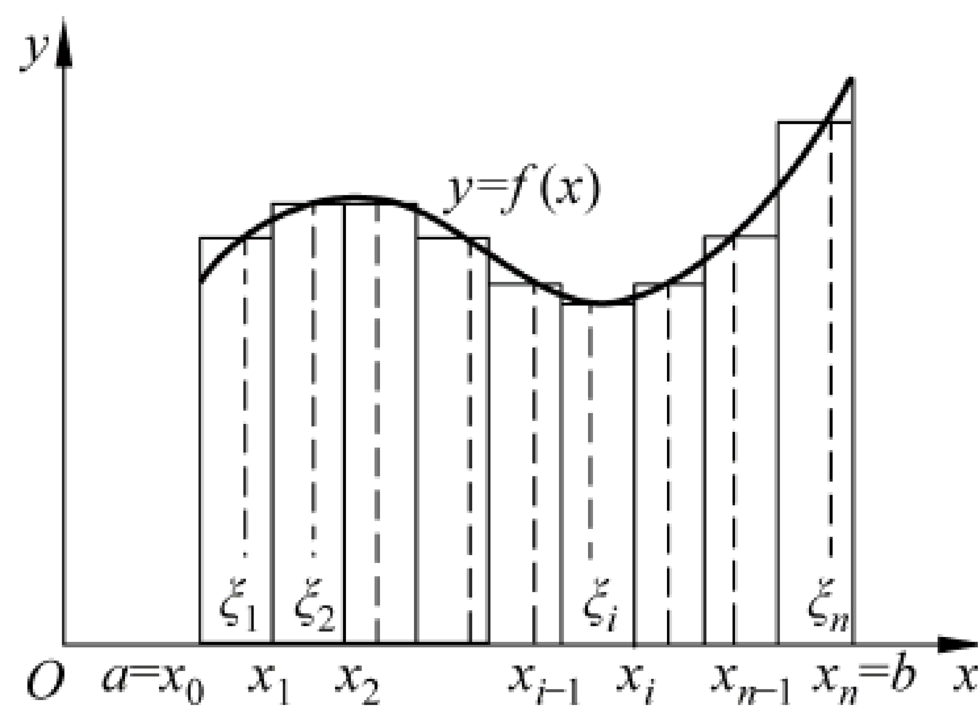


图 3-1

(3) 累加：曲边梯形的面积

$$S=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k。$$

(4) 取极限：令 $\lambda(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，称为分法 T 的细度(精细程度)，为了

克服误差，使分割越来越细，让 $\lambda(T)\to 0$，则

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

注 求曲边梯形面积的方法是定积分的基本方法，又称**微元法**(**元素法**)。

定义3 定积分：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I$$

存在，且 I 与分法 T 和取法 ξ_k 无关，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**，且称极限值 I 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k。$$

定积分的几何意义 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $x=a,x=b,y=f(x)$ 和 x 轴围成的曲边梯形的面积。

一般情况下，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是在 $[a,b]$ 范围上 x 轴上方图形的面积与下方图形的面积的差。

定义4 积分上限函数：若 $f(x)$ 可积，则称 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为**积分上限函数**。

二、基本结论

定理4(**牛顿-莱布尼茨公式**) 若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)。$$

定理5(**变限积分函数的导数**) 若 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，则变限积分函数 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且

$$F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)。$$

定理6(**定积分中值定理**) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi)。$$

定理7(**定积分性质和公式**)

1. 定积分的基本性质

(1) 线性性质 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 积分区间可加性 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 保序性 若 $f(x)\leqslant g(x),x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

(4) 绝对值不等式 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$。

2. 对称区间上的定积分　若 $f(x)$为$[-l,l]$上的连续函数，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 是奇函数}, \\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}。\end{cases}$$

3. 周期函数的定积分　若 $f(x)$是以 T 为周期的连续函数，则

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

4. 三角函数的定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 是偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 是奇数}。\end{cases}$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$；$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$。

利用公式（1）和公式(2)，根据定积分的几何意义，可以推导出下面的积分公式：

(i) $\int_0^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$，$\int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x, & n\text{ 偶数}, \\ 0, & n\text{ 奇数}。\end{cases}$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x, & n\text{ 偶数}, \\ 0, & n\text{ 奇数},\end{cases}$ $\int_0^{2\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x, & n\text{ 偶数}, \\ 0, & n\text{ 奇数}。\end{cases}$

注　$n!!$ 是 n 的双阶乘，表示跳跃连乘，即 n 是偶数，则偶数连乘，n 是奇数，则奇数连乘。如 $8!!=8\times6\times4\times2$，$7!!=7\times5\times3\times1$。

5. 求三角函数定积分的常用变换——换元

(1) 形如$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的定积分，常做变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，这样可以使积分区间不变，被积函数正弦和余弦互换，从而被积函数发生变化。

(2) 形如$\int_0^{\pi} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 或$\int_0^{\pi} xf(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的定积分，常做变换

$$x=\pi-t \quad \text{或} \quad \int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi},$$

令 $x=\frac{\pi}{2}+t$，这样可以将$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ 也变为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$，最终都转化为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$。

(3) 形如$\int_0^{2\pi} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的定积分，常做变换

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \quad \text{或} \quad \int_0^{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}(\text{以 } 2\pi \text{ 为周期函数性质})。$$

三、计算定积分的基本方法

题型 6　用变量代换、分部积分法计算定积分

计算定积分的基本方法是求出原函数，应用牛顿-莱布尼茨公式。这和计算不定积分在方法上并没有本质区别，所以如果仅用这个方法计算的定积分，这里不再赘述。

1. 变量代换

定积分的变量代换和不定积分的变量代换本质是相同的，但是对计算两类积分所起到的作用有时是不同的，主要体现在：

(1) 不定积分的变量代换求得的积分结果一定要还原(换回原变量)，而定积分是不需要的。正因为这个原因，在计算定积分时，只要通过变量代换能够得到较简单的定积分，就可以进行变量代换，并可以多次代换，不必考虑还原的麻烦。

(2) 对一些定积分来说，通过换元变换后，尽管所得到的定积分可能仍然没办法计算，但是这个定积分或通过拆分后得到的定积分可能与原来定积分有一定的关系，如相等、其和或差是可求的定积分，这样的换元变换仍是有意义的。

(3) 计算三角函数不定积分的一个常用方法是降次，但是对于被积函数为$\sin^n x$ 或$\cos^n x$三角函数的定积分来说，不用降次，只需利用三角函数的积分公式。事实上，在计算三角函数的定积分时，我们只要将三角函数积分转化为如下形式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{2\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_0^{2\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x;\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

的积分，利用三角函数积分公式和定积分的几何意义，都可以得到定积分值。

例 3.16　计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$；

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^7 x\,\mathrm{d}x$。

解　(1) 令 $t=\arcsin\sqrt{x}$，则 $x=\sin^2 t$，$\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$，当 x 取上限$\frac{1}{2}$时，$t=\frac{\pi}{4}$；当 x 取下限$\frac{1}{4}$时，$t=\frac{\pi}{6}$。于是 $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2t\,\mathrm{d}t=\frac{5}{144}\pi^2$。

(2) 令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$，当 x 取上限 a 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 x 取下限 0 时，$t=0$。于是

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin t}{a\sin t+a\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t;$$

令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u+\cos u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$。所以

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{4}。$$

或者求出原函数

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t-\ln|\sin t+\cos t|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}。$$

(3) 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，当 x 取上限 1 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 x 取下限 0 时，$t=0$。于是

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}。$$

(4) 令 $x=\pi-t$,则 $dx=-dt$,于是

$$\int_0^{\pi} x\sin^7 x\,dx = \int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^7 t\,dt = \pi\int_0^{\pi}\sin^7 t\,dt - \int_0^{\pi} t\sin^7 t\,dt,$$

因此

$$\int_0^{\pi} x\sin^7 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^7 t\,dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\,dt = \frac{6!!}{7!!}\pi = \frac{48}{105}\pi。$$

注 例 3.16(4)也可直接利用积分公式,不必做变量代换(换元)。另外,例 3.16 的(2)中求$\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}$的原函数有一个特定方法:

设 c,d 不同时为 0,a,b 都不等于 0,则

$$\frac{c\sin t + d\cos t}{a\sin t + b\cos t} = \frac{A(a\sin t + b\cos t)}{a\sin t + b\cos t} + \frac{B(a\sin t + b\cos t)'}{a\sin t + b\cos t},$$

即分子一定可以表示成分母乘以一个常数与分母的导数乘以一个常数的和,最后确定常数 A 和 B。

以本题为例:

$$\sin t = A(\sin t + \cos t) + B(\sin t + \cos t)' = (A-B)\sin t + (A+B)\cos t,$$

于是有 $A-B=1, A+B=0$ 解得 $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$。于是有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}\right]dt = \frac{1}{2}(t - \ln|\sin t + \cos t|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}。$$

2. 分部积分

定积分的分部积分与不定积分的分部积分的思想、方法是相同的,使用的范围和对象也是相同的。

例 3.17 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; (2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$; (4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$。

解 (1) 利用分部积分,取 $u(x)=\ln(x+1)$,显然 $v(x)=x$,于是

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \ln 2 - [x - \ln(x+1)]\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1。$$

(2) 令 $\arcsin x = t$,则 $x=\sin t$,$dx=\cos t\,dt$,于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t^2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t^2\,d\sin t$$

$$= [\sin t\cdot t^2 + 2t\cos t - 2\sin t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 1。$$

(3) 利用分部积分,取 $u(x)=\sin x$,显然 $v(x)=e^x$,于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x de^x = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$$

移项，则有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$。

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x d\cot x = -x\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left|\sin x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2。$$

例 3.18 设 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 5, f(\pi) = 3$，求 $f(0)$。

解 由于 $\int_0^{\pi}[f(x) + f''(x)]\sin x dx = \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx$，且

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x d f'(x) = \sin x f'(x) \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x dx$$
$$= -\cos x f(x) \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x f(x) dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^{\pi} \sin x f(x) dx,$$

所以

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx = f(0) + f(\pi) = 5。$$

由于 $f(\pi)=3$，所以 $f(0)=2$。

注 不论是定积分还是不定积分，如果被积函数含有抽象函数的导数，大都用分部积分。特别是被积函数是二阶乃至三阶导数的积分。

题型 7 计算对称区间的定积分

对称区间的定积分是定积分的常见题型，一旦遇到这类积分，就要考虑被积函数是否是奇函数或偶函数，从而利用对称区间积分的性质。一般情况下，可将被积函数表示为几个函数的和，拆分，将和的积分写成积分的和，对部分积分利用对称区间积分性质。

例 3.19 计算下列对称区间的定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} (x^3 + \sqrt{1-x^2})^2 dx$；　　(2) $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x + 1}{1+x^2} dx$；

(3) $\int_{-1}^{1} x\ln(1+e^x) dx$；　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x} dx$。

解 (1) 拆分，第二个积分的被积函数是奇函数，在对称区间积分等于0，于是

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^{1} x^6 dx + \int_{-1}^{1} 2x^3 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^{1} (1-x^2) dx = \frac{34}{21}。$$

(2) 拆分，第一个积分的被积函数是奇函数，在对称区间积分等于0，于是

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x + 1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = 0 + \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \pi。$$

(3) 利用积分区间的可加性，将积分拆分为两个积分的和，于是

$$\int_{-1}^{1} x\ln(1+e^x) dx = \int_{-1}^{0} x\ln(1+e^x) dx + \int_{0}^{1} x\ln(1+e^x) dx。$$

将第一个积分也变成在[0,1]上的积分，做负变换，令 $x=-t$，则 $dt=-dx$，于是

$$\int_{-1}^{1} x\ln(1+e^x)dx = -\int_0^1 t\ln(1+e^{-t})dt + \int_0^1 x\ln(1+e^x)dx$$

$$= -\int_0^1 t[\ln(1+e^t)-t]dt + \int_0^1 x\ln(1+e^x)dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}。$$

(4) 做负变换，令 $x=-t$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{-t}{1-\sin t}(-dt) = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx,$$

所以

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx\right)$$

$$= -2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1-\sin^2 x}dx = -2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = -2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\,d\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{-2x}{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)。$$

例 3.20 设 $f(x),g(x)$是连续函数，$g(x)$是偶函数，且 $f(x)+f(-x)=A$(常数)。

(1) 证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx$；(2) 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$。

解 (1) 由于 $g(x)$是偶函数，令 $x=-t$，则有

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)g(t)dt = \int_0^a f(-x)g(x)dx。$$

根据 $f(x)+f(-x)=A$，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x)g(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx$$

$$= \int_0^a [f(x)g(x)+f(-x)g(x)]dx = A\int_0^a g(x)dx。$$

(2) 因为$(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = 0$，所以 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = C$。取 $x=0$，得 $C=\frac{\pi}{2}$，于是有 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$。根据结论(1)，得到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}。$$

计算对称区间的定积分方法综述

对称区间的积分具有很好的性质：奇函数在对称区间的积分等于0，偶函数在对称区间上的积分等于半个积分区间上积分的2倍。因此在计算对称区间的积分时，首先考虑被积函数是否是奇函数，以及如何利用对称区间的积分性质。

一般情况下，如果被积函数不是奇函数，考虑把被积函数表示成几个函数的和，其中一个或几个函数是奇函数，这些函数在此对称区间的积分等于0。如例3.19的(1)和(2)。

如果被积函数没办法拆分为两个函数的和，凑微分、变量代换和分部积分方法又不合适，可考虑如下两个方法：

(1) 把此区间的积分表示为两个区间积分的和，即

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

对第一个积分$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 做负变换，令 $x=-u$，则$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(-u)\mathrm{d}u$，于是有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x。$$

如例 3.19 的(3)，新的积分被积函数发生了变化。

(2) 对于对称区间的积分做负变换，令 $x=-u$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{-a} f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-a}^{a} f(-u)\mathrm{d}u。$$

寻求新的积分与原积分的关系。如例 3.19 的(4)。

题型 8　计算非初等函数的定积分

计算非初等函数积分的基本方法：将被积函数在积分区间范围上表示为分段函数，利用积分区间的可加性，把定积分表示为在几个区间上积分的和，使被积函数在每个积分区间上都是初等函数。

例 3.21　计算下列非初等函数的定积分：

(1) $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{2}[x]\ln x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{0}^{2}x^2\operatorname{sgn}(x-1)\mathrm{d}x$。

解　(1) 由于

$$\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x\in[-2,0],\\ x, & x\in(0,1],\\ x^2, & x\in(1,2],\end{cases}$$

于是根据积分区间可加性，有

$$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{11}{2}。$$

(2) 由于

$$\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ -\cos x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x&=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{4}{3}。\end{aligned}$$

(3) 由于$[x]=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2),\end{cases}$于是

$$\int_{0}^{2}[x]\ln x\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}[x]\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}[x]\ln x\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_{1}^{2}=2\ln 2-1。$$

(4) 由于

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,0),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x\in(0,+\infty),\end{cases}$$

于是

$$\int_0^2 x^2\operatorname{sgn}(x-1)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\operatorname{sgn}(x-1)\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\operatorname{sgn}(x-1)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=2。$$

例 3.22 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2],\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式。

解 当 $x\in[0,1)$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$；

当 $x\in[1,2]$ 时，

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6},$$

于是

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}, & x\in[1,2]。\end{cases}$$

题型 9 用换元变换计算定积分

计算定积分的基本方法是牛顿-莱布尼茨公式，也就是求出原函数，计算上限、下限两点函数值的差，如果不能直接求出原函数，可用变量代换和分部积分。如果这系列办法都无济于事，只能寻求变换，即**换元变换**。

换元变换的常用两类变换：

(1) 保持积分区间不变，使被积函数发生变换，经变换后，寻求新的定积分的积分方法，或新的定积分与原定积分的关系。

对于定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，通过这样的换元 $t=a+b-x$，再交换积分的上下限，可以使积分区间不变！

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x。$$

(2) 对于对称区间的积分，可将其拆分，对其中的一个积分做负变换，化为同一个积分区间的积分，再合并

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x;$$

或做负变换，令 $x=-t$ 得到

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-a}^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(-x)\mathrm{d}x。$$

例 3.23 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{2\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|\mathrm{d}x$； (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$；(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$。

解 (1) 由于

$$\int_0^{2\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right|\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\mathrm{d}x。$$

为了去掉绝对值符号，令 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$，从而有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|\mathrm{d}x&=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}|\sin t|\mathrm{d}t=2\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\\&=4\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=8。\end{aligned}$$

(2) 令 $t=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x=\frac{\pi}{2}-x$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$，于是

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)2t}(-\mathrm{d}t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x。$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln 2。\end{aligned}$$

(3) 令 $t=\frac{\pi}{4}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\frac{2}{1+\tan t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t，$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$。

(4) 将积分拆分为两个积分的和，则有

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x。$$

又由于

$$\begin{aligned}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x&=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}\sqrt{\cos x}=2\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x\right]\\&=\sqrt[4]{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right)-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

所以 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\sqrt[4]{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right)$。

注 在这组例子中，我们发现：换元变换法具有很强的不确定性，在某种意义上说是一种巧合，并非所有积分都具有这样的性质。但不论是巧合，还是规律，至少还是一类积分方法。也就是说，在没有更好的方法时，可以考虑换元，寻求解题途径和方法。

题型 10　计算反常积分(广义积分)

(1) 无穷限反常积分：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

(2) 无界函数反常积分：无界函数反常积分又称瑕积分，分为三种类型：

a 为函数 $f(x)$ 的瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

b 为函数 $f(x)$ 的瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

$c\in(a,b)$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

定理 8(反常积分的收敛定理)

(1) 设函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，如果存在常数 $p>1$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$ 或正无穷大，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

(2) 设函数 $f(x)$ 在$(a,b]$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$x=a$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点。如果存在常数 $0<p<1$ 使得 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)$ 存在，则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$ 或正无穷大，则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

例 3.24　计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x$。

解　(1) 令 $\mathrm{e}^x=t$，则

$$\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan t}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{2t^2}\arctan t-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\arctan t+C,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2\mathrm{e}^{2x}}\arctan \mathrm{e}^x-\frac{1}{2\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{2}\arctan \mathrm{e}^x\right)\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}。$$

(2) $\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}\mathrm{d}x$，令 $x-1=\sec t$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cos t\mathrm{d}t$$
$$=\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}。$$

注　计算反常积分和计算正常积分的方法基本没有区别，只是在用牛顿-莱布尼茨公式时，若不能直接代入，就求极限。(1)题无穷积分，求出原函数，再求 $x\to+\infty$时的极限；(2)题是无穷积分，转化为一个有限积分(也是反常积分)，但原函数在上下限都有定义，直接代入即可。

例 3.25 判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$。

解 (1) $x=0$ 是瑕点，由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{\sin x}=1$，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 发散。

(2) $x=\pm 1$ 是瑕点，由于

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

且 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，根据瑕积分收敛定理知，积分 $\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，根据瑕积分收敛定理知，积分 $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以瑕积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛。

(3) 无穷积分，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^2}=0$，根据无穷积分收敛定理知，$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

(4) 无穷积分，由于 $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$，所以收敛。

练习题 3-2

1. 计算下列三角函数的定积分：

(1) $\int_{0}^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3 x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\cos^8 x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cos 2x\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin x^2+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x(a,b>0)$；　　(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$。

2. 计算下列无理函数的定积分：

(1) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{a}^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x(a>0)$；　　(4) $\int_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$。

3. 计算下列非初等函数的定积分：

(1) $\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{3}[x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-2}^{2}\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{0}^{\pi}\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$。

4. 利用函数的周期性、奇偶性计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin^2 x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{2n\pi}|\cos^3 x|\mathrm{d}x(n\in\mathbb{N}_+)$；

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{e^x+1}\cos x\,dx$；

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\left(\ln\frac{1+x}{1-x}+1\right)dx$；

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{x+|x|}{1+x^2}dx$；

(6) $\int_{-1}^{1} (x^2-2x+\sin x)\sqrt{1-x^2}\,dx$；

(7) $\int_{2012}^{2012+\pi} \sin^2 2x(\tan x+1)dx$；

(8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+100\pi} |\cos 2x|\,dx$。

5. 利用分部积分计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$；

(2) $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$；

(3) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$；

(4) $\int_0^1 xe^x dx$。

6. 用换元变换计算下列三角函数的定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-2x}}dx$；

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$；

(4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$；

(5) $\int_0^{n\pi} x|\cos x|\,dx\ (n\in\mathbb{N}_+)$；

(6) $\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx$。

7. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$；

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$；

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^3)}dx$。

8. 已知 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，求$\int_0^1 xf''(2x)dx$。

9. 若 $f(x)=e^x+2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$。

10. 设 $f(x)=\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$。

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)dx$。

12. 设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(2x-t)dt=\arctan x$，且 $f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)dx$。

13. 设函数 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt, x>0$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$。

3.3 一元函数积分考研真题

一、一元函数积分考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于一元函数积分的考研数一真题共出了 14 道题，其题型分布在：

1. 计算定积分与不定积分：共有5个题，分布在2007年，2012年，2015年和2018年(2题)。
2. 定积分的几何意义：有1个题，分布在2007年。
3. 比较定积分值大小：共有3个题，分布在2011年，2012年和2018年。
4. 函数和原函数性质的讨论：共有2个题，分布在2005年和2009年。
5. 定积分的等式与不等式证明：有1个题，分布在2008年。
6. 讨论反常积分的敛散性：共有2个题，分布在2010年和2016年。

1　一元函数积分考研数一真题题型分析

1. 计算定积分与不定积分：2007年考了利用变量代换和分部积分计算定积分，以及利用定积分的几何意义计算定积分；2012年考了计算无理函数定积分；2015年考了对称区间的定积分；2018年考了用分部积分法计算抽象函数的定积分以及用变量代换法计算不定积分。

2. 定积分的几何意义：2007年考了根据定积分的几何意义求上限积分函数的函数值。

3. 比较定积分值大小：2011年考了比较定积分值大小，定积分的积分区间相同，被积函数不同；2012年考了比较定积分值大小，定积分的被积函数相同，但积分区间不同；2018年考了不同积分，一个积分值可求出，另外两个积分与这个值比较大小。

4. 函数和原函数性质的讨论：2005年考了函数和原函数的奇偶性、周期性和单调性。

5. 定积分的等式与不等式证明：2008年考了积分等式的证明。

6. 讨论反常积分的敛散性：2010年考了反常积分收敛与哪些量有关；2016年考了反常积分收敛，未知常数满足的条件。

2　一元函数积分考研数一真题

1. (2005，二(8)(4分))设函数$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M的充分必要条件是N”，则必有

(A) $F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数；　(B) $F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数；

(C) $F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数；　(D) $F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数。

考点与解法：原函数和导函数的关系。利用反例排除法或函数性质。

2. (2007，二(11)(4分)) 计算$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$。

考点与解法：计算定积分。利用变量代换和分部积分法。

3. (2007，一(3)(4分)) 如图3-2所示，设函数$y=f(x)$在$[-3,-2]$，$[2,3]$上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间$[-2,0]$，$[0,2]$上的图形分别是直径为2的上、下半圆周，设$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$；

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$；

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$；

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$。

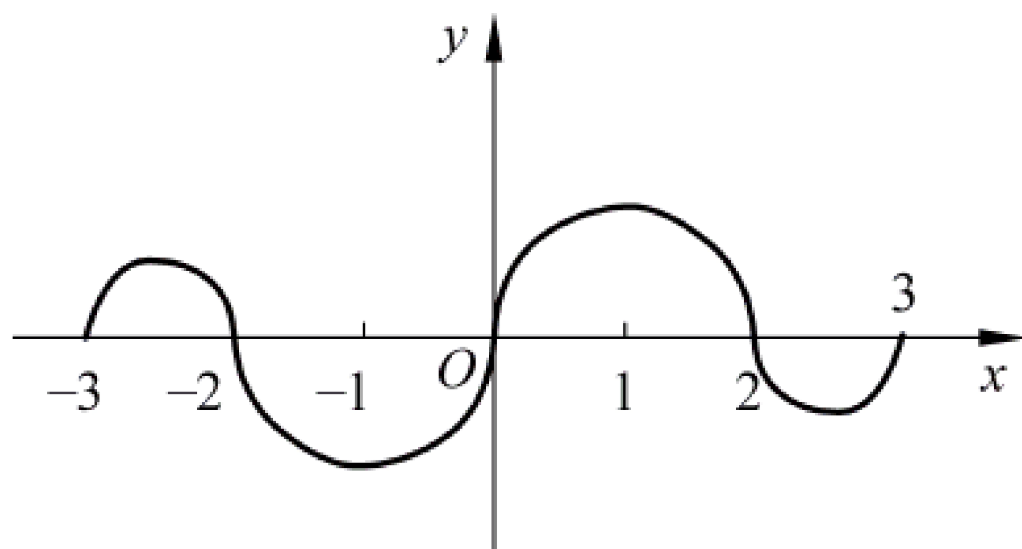


图　3-2

考点与解法：定积分的几何意义。根据定积分的几何意义，分别求出 $F(3)$、$F(-3)$，$F(2)$和 $F(-2)$的值，判别函数值间的关系。

4. (2008，三(18)(5 分)) 设函数 $f(x)$是以 2 为周期的连续函数，证明：

$$G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

也是以 2 为周期的周期函数。

考点与解法：定积分等式的证明。利用 $f(x+2)=f(x)$，变量代换，证明：$G(x)=G(x+2)$。

5. (2009，一(4)(4 分)) 设函数 $f(x)$ 在区间$[-1,3]$上的图形如图 3-3 所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为：

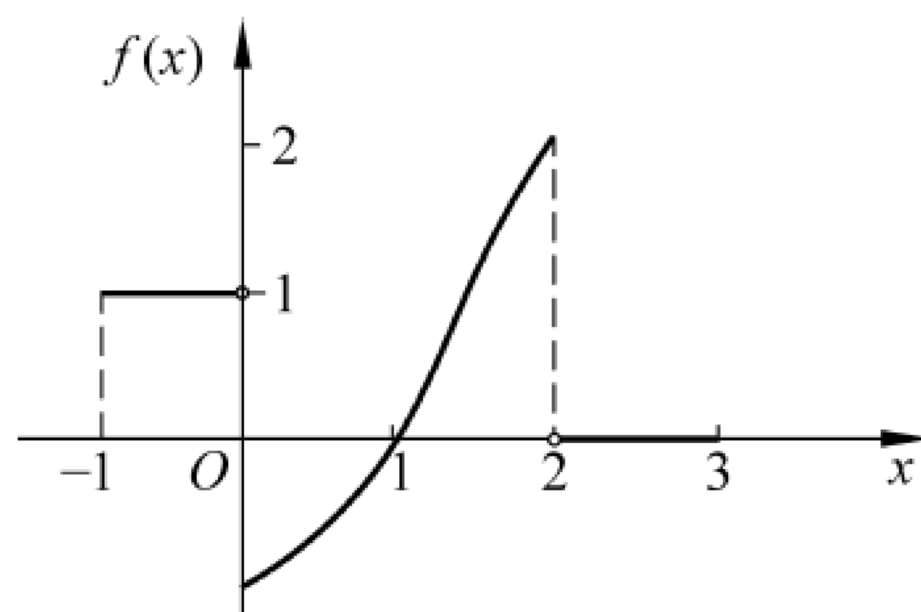
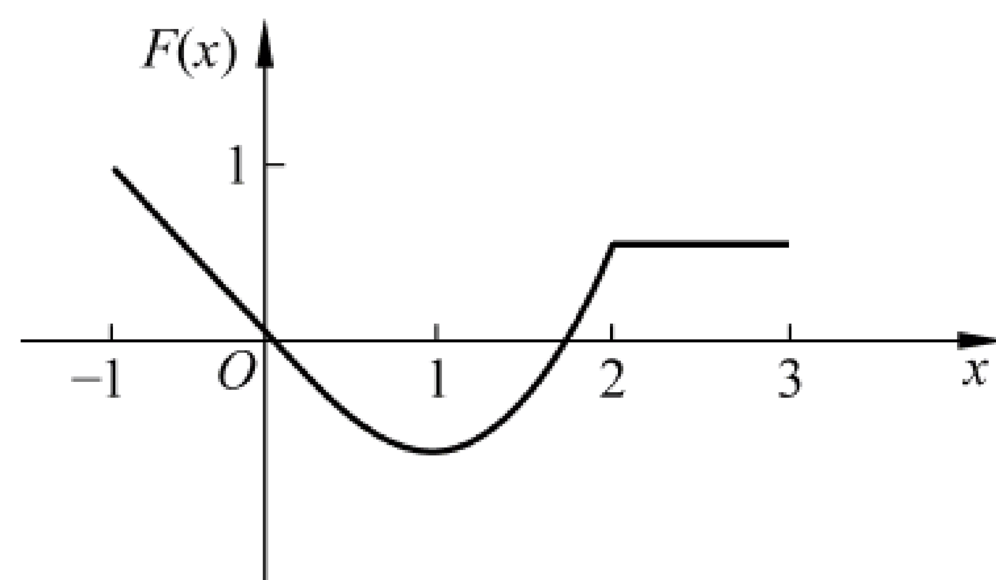
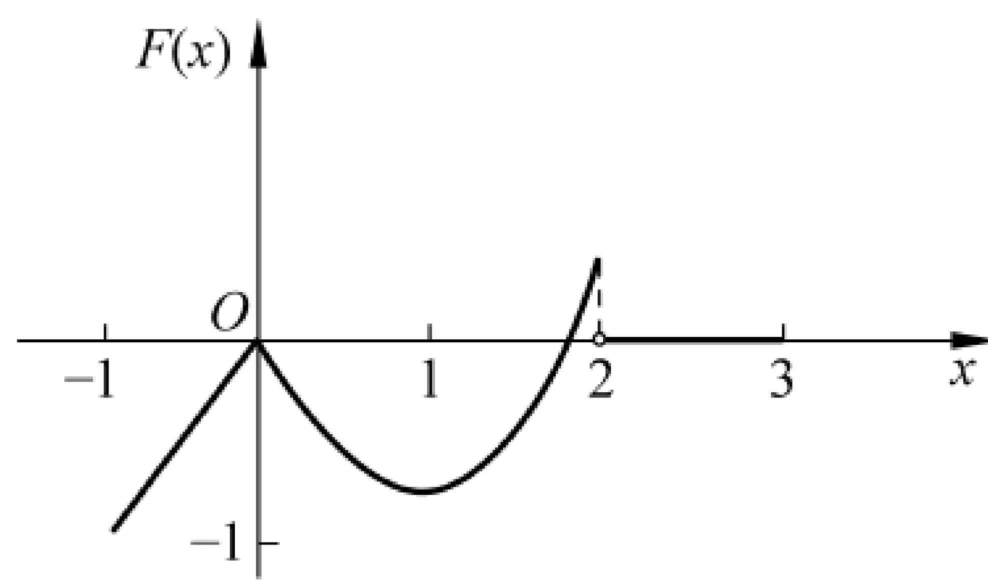


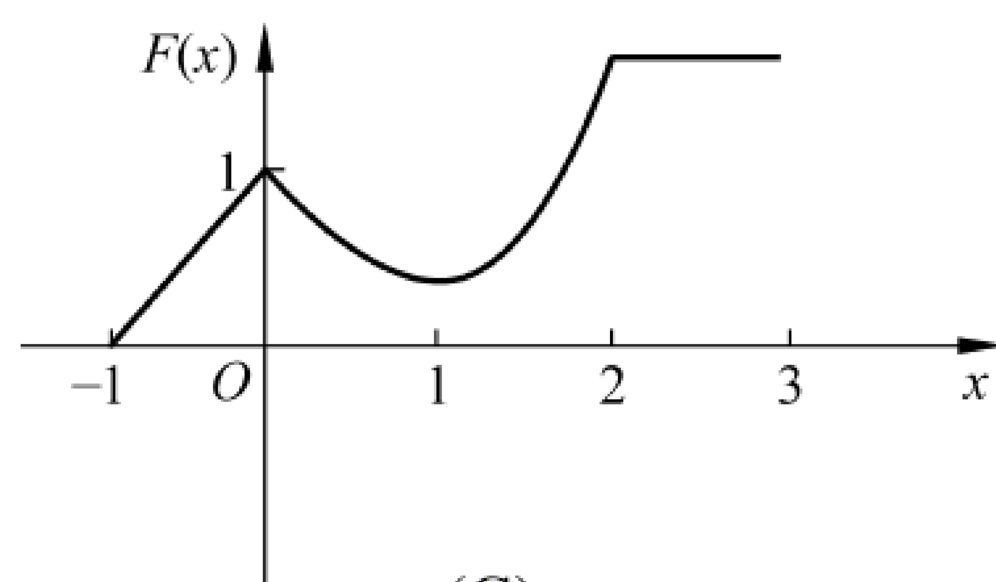
图 3-3



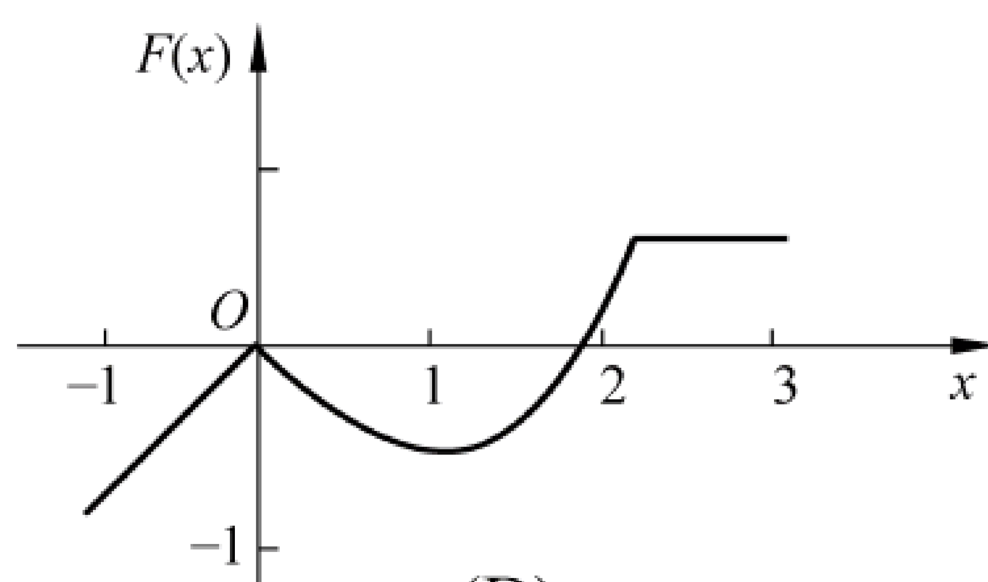
(A)



(B)



(C)



(D)

考点与解法：定积分的几何意义。根据定积分的几何意义，确定上限积分函数的图像。

6. (2010，一(3)(4 分)) 设 m,n 均为正整数，则反常积分$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关； (B) 仅与 n 的取值有关；

(C) 与 m,n 的取值都有关； (D) 与 m,n 的取值都无关。

考点与解法：判别反常积分敛散性。根据判别反常积分的敛散性定理。

7. (2011，一(4)(4 分)) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$； (B) $I<K<J$； (C) $J<I<K$； (D) $K<J<I$。

考点与解法：比较定积分值大小。在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上，判断 $\sin x,\cot x,\cos x$ 的大小关系。

8. (2012，二(10)(4 分)) 计算$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算无理函数的定积分。配方，做三角代换。

9. (2012,一(4)(4 分)) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\,(k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$; (B) $I_3<I_2<I_1$; (C) $I_2<I_3<I_1$; (D) $I_2<I_1<I_3$。

考点与解法:比较定积分大小。根据定积分性质和几何意义。

10. (2015,二(11)(4 分)) 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx$。

考点与解法:计算对称区间的定积分。拆分,将定积分表示为两个定积分的和,利用对称区间积分的性质。

11. (2016,一(1)(4 分)) 若反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛,则

(A) $a<1,b>1$; (B) $a>1,b>1$; (C) $a<1,a+b>1$; (D) $a>1,a+b>1$。

考点与解法:判断反常积分的敛散性。将积分拆成两个积分,一个是无穷积分,另一个是瑕积分,利用反常积分的敛散性的判别定理。

12. (2018,一(4)(4 分)) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$,则 M,N,K 的大小关系为

(A) $M>N>K$; (B) $M>K>N$;

(C) $K>M>N$; (D) $K<N<M$。

考点与解法:比较定积分值的大小。计算 M 的值,解得 $M=\pi$,N 的被积函数小于 1,K 的被积函数大于 1。

13. (2018,一(10)(4 分)) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,若曲线 $y=f(x)$ 过点与曲线 $y=2^x$ 在点(1,2)处相切,求 $\int_0^1 xf''(x)dx$。

考点与解法:计算定积分。根据已知条件求出 $f(0)$,$f(1)$ 和 $f'(1)$ 的值,利用分部积分法计算 $\int_0^1 xf''(x)dx$。

14. (2018,三(15)(10 分)) 计算 $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$。

考点与解法:计算不定积分。变量代换,令 $e^x=\cos t$。

二、一元函数积分考研数三真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里,关于一元函数积分的考研数三真题共出了 14 道题,其题型分布在:

1. 计算定积分与不定积分:共有 7 个题,分布在 2004 年,2008 年,2009 年,2011 年,2014 年,2017 年和 2018 年。
2. 定积分的几何意义:共有 2 个题,分布在 2007 年和 2008 年。
3. 比较定积分值大小:共有 3 个题,分布在 2010 年,2011 年和 2018 年。
4. 函数与原函数的性质:有 1 个题,分布在 2009 年。
5. 计算反常积分:有 1 个题,分布在 2013 年。

1 一元函数积分考研数三真题题型分析

1. 计算定积分与不定积分:2004 年考了分段函数的定积分;2008 年考了先求函数表达

式，再计算定积分；2009 年考了用分部积分法计算不定积分；2011 年考了计算不定积分；2014 年考了用分部积分法计算定积分；2017 年考了计算对称区间的定积分；2018 年考了用变换代换法计算不定积分。

2. 定积分的几何意义：2007 年考了根据定积分的几何意义求上限积分函数的函数值；2008 年考了分部积分和定积分的几何意义。

3. 比较定积分值大小：2010 年考了积分区间相同，被积函数不同，比较二积分值大小；2011 年考了积分区间相同，被积函数不同，比较三积分值大小；2018 年考了不同积分，一个积分值可求出，另外两个积分与这个值比较大小。

4. 函数与原函数的性质：2009 年考了积分上限函数与函数的关系。

5. 计算反常积分：2013 年考了计算无穷积分。

2　一元函数积分考研数三真题

1. (2004，一(3)(4 分)) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ -1, & x\geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算分段函数的定积分。利用积分区间的可加性，将定积分表示为两个积分的和。

2. (2007，一(3)(4 分))题目同上小节 3.(2007，一(3)(4 分))题。

3. (2008，一(2)(4 分)) 如图 3-4 所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积；

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积；

(C) 曲边三角形 ACD 的面积；

(D) 三角形 ACD 的面积。

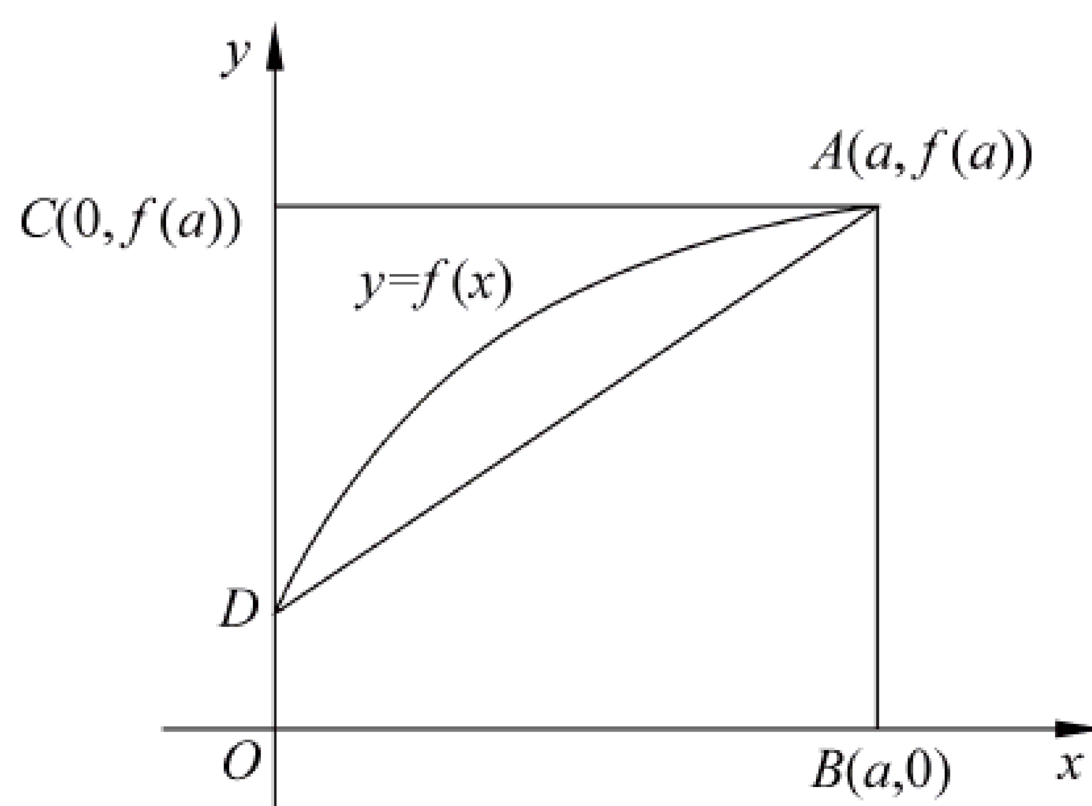


图 3-4

考点与解法：计算定积分和定积分的几何意义。利用分部积分，利用定积分的几何意义确定。

4. (2008，二(10)(4 分)) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，求 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算定积分。求函数的表达式，计算定积分。

5. (2009，三(16)(10 分)) 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$。

考点与解法：计算不定积分。利用分部积分法。

6. (2009，一(4)(4 分))题目同上小节 5.(2009，一(4)(4 分))题。

7. (2010，三(18)(10 分))

(i) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t$ 的大小，并说明理由；

(ii) 设 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。

考点与解法：比较定积分值大小，求数列极限。(i)只需在$[0,1]$比较$\ln(1+t)$与t的大小；(ii)对一般项进行放缩，利用夹逼法则。

8. (2011，三(17)(10 分)) 求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算不定积分。拆分，两个积分分别用变量代换和分部积分。

9. (2011，一(4)(4 分))题目同上小节 7.(2011，一(4)(4 分))题。

10. (2013，二(11)(4 分)) 求$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算反常积分。用分部积分法。

11. (2014，二(11)(4 分)) 求$\int_0^a xe^{2x}\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算定积分。用分部积分法。

12. (2017，二(9)(4 分)) 求$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算对称区间的定积分。拆分，一个利用对称区间的定积分的性质，另一个用变量代换或定积分的几何意义。

13. (2018，一(3)(4 分))题目同上小节 12.(2018，一(4)(4 分))题。

14. (2018，三(15)(10 分))题目同上小节 14.(2018，三(15)(10 分))题。

3.4 本章练习题答案与提示

练习题 3-1 答案与提示

1. (1) $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$。提示：用凑的方法，将被积函数表示为整式、一次分式和的形式，有

$$\frac{x^4}{x^2-1}=\frac{x^4-1+1}{x^2-1}=x^2+1+\frac{1}{(x-1)(x+1)}=x^2+1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right]。$$

(2) $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{2}{x+1}+C$。提示：用待定系数法分解被积函数$\frac{4}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，去分母$4=A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$，利用多项式恒等，系数相等(或赋值法)解得，$A=-1,B=-2,C=1$。

(3) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$。提示：用凑的方法，将被积函数表示为整式、一次分式和的形式，有

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}。$$

(4) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$。提示：用凑的方法，将被积函数表示为一次分式和二次分式和的形式

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1+x^2-x^2}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}。$$

(5) $\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}+C$。提示：令$1-x=t$，则$\int\frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{1-t}{t^3}(-\mathrm{d}t)=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$。

(6) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$。提示：二次分式，分母不能再分解，配方，凑微分，利用公式

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{1}{x^2+2x+1+4}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1)=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C。$$

(7) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$。提示：二次分式的不定积分，用分子的一次项 x 凑成分母的微分，即 $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x+5}d(x^2+2x+5)+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$。

(8) $\frac{1}{8}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\right]+C$。提示：配方、利用二次积分的降次公式

$$\int\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx=\int\frac{1}{[(x+1)^2+2^2]^2}d(x+1)=\frac{1}{8}\left[\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx\right]。$$

(9) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$。提示：利用待定系数法分解被积函数 $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1+x)^2}+\frac{Cx+D}{1+x^2}$，即 $1=A(1+x)(1+x^2)+B(1+x^2)+(Cx+D)(1+x)^2$，得到 $1=A+B+D$，$0=A+C+2D$，$0=A+B+D+2C$，$0=A+C$，解得 $A=B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2}$，$D=0$。

(10) $\frac{x^4}{8(1+x^8)^2}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C$。提示：凑微分，化成降次公式的形式，得到

$$\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{[1+(x^4)^2]^2}dx^4=\frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{(1+x^8)^2}+\int\frac{1}{1+(x^4)^2}dx^4\right]。$$

2. (1) $\arcsin(2x-1)+C$。提示：分母变形

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x}=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x-x^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}。$$

(2) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$。提示：令 $\sqrt[4]{x}=u$，则 $x=u^4$，$dx=4u^3du$，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{4u^3}{u^2+u}du=4\int\frac{u^2}{u+1}du=4\left[\int(u-1)du+\int\frac{1}{u+1}du\right]。$$

(3) $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-x(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|(x+1)^{1/3}+1|+C$。提示：令 $\sqrt[3]{x+1}=u$，则 $x=u^3-1$，$dx=3u^2du$，于是 $\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=3\int\frac{u^2}{1+u}du=3\left[\int(u-1)du+\int\frac{1}{u+1}du\right]$。

(4) $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$。提示：分母有理化。

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}dx&=\int(x\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})dx\\&=\int[(x+2)\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}]dx\\&=\int[(x+2)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}]dx。\end{aligned}$$

(5) $\frac{1+\sqrt{4x-x^2-3}}{2-x}-\arcsin(x-2)+C$。提示：$\frac{1}{1-\sqrt{4x-x^2-3}}=\frac{1}{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}$，令 $x-2=\sin\alpha$，则 $dx=\cos\alpha d\alpha$，于是

$$\int\frac{1}{1-\sqrt{4x-x^2-3}}dx=\int\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}d\alpha=\int\left(-1+\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)d\alpha=-\alpha+\int\frac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}d\alpha。$$

(6) $\arccos\frac{1}{x+2}+C$。提示：令 $x+2=\sec\alpha$，则 $dx=\sec\alpha\tan\alpha d\alpha$，于是

$$\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\int\frac{1}{\sec\alpha\tan\alpha}\sec\alpha\tan\alpha d\alpha=\alpha+C。$$

(7) $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}|+C$。提示：配方，利用公式

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3^3}}\mathrm{d}(x+1)=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}|+C。$$

(8) $2\sqrt{x^2+2x+10}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}|+C$。提示：利用分子的 $2x$ 凑成分母

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\mathrm{d}(x^2+2x+10)+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\mathrm{d}x。$$

(9) $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C$。提示：令 $x=3\sec\alpha$，则 $\mathrm{d}x=3\sec\alpha\tan\alpha\mathrm{d}\alpha$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{3\tan\alpha}{3\sec\alpha}\cdot 3\sec\alpha\tan\alpha\mathrm{d}\alpha=3\int\tan^2\alpha\mathrm{d}\alpha=3\int(\sec^2\alpha-1)\mathrm{d}\alpha。$$

(10) $\frac{1}{2}\left(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|\right)+C$。提示：令 $x=\sin\alpha$，则 $\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$，于是

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}\mathrm{d}(\sin\alpha+\cos\alpha)+\int\mathrm{d}\alpha\right)。$$

3. (1) $\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$。提示：凑微分 $(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x-\cos x)$。

(2) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$。提示：降次，将三角函数降为一次的正弦或余弦

$$\sin^4 x=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x。$$

(3) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$。提示：凑微分，化为有理三角函数积分

$$\sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x=\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}\sin x=\sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}\sin x。$$

(4) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$。提示：降次 $\sin 5x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)$。

(5) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$。提示：变形，凑微分

$$\int\frac{1}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x(3+4\tan^2 x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3+4\tan^2 x}\mathrm{d}\tan x。$$

(6) $\ln|\csc x-\cot x|-\ln|\sin x|+C$。提示：简化分母

$$\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\mathrm{d}x。$$

(7) $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$。提示：$\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$。

(8) $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$。提示：利用万能公式：设 $x=2\arctan t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$，于是

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t\right)\mathrm{d}t。$$

(9) $x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\ln(1+\cos x)+C$。提示：拆分，

$$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x-\ln|1+\cos x|+C。$$

对第一部分积分利用分部积分$\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$。

(10) $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$。提示：变量代换，令 $\ln x = t$，则 $x = \mathrm{e}^t$，$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，于是$\int \cos\ln x\mathrm{d}x = \int \cos t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，两次运用分部积分，移项。

4. (1) $x\tan x + \ln|\cos x| + C$。提示：

$$\int x\sec^2 x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan x = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x = x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + C。$$

(2) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$。提示：

$$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(x + x\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\sin 2x$$
$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}x。$$

(3) $\frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$。提示：分部积分

$$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^2\arctan x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x^2。$$

(4) $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$。提示：分部积分

$$\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x。$$

(5) $-\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$。提示：拆分$\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} = \frac{\arctan x}{x^2} - \frac{\arctan x}{1+x^2}$，前者用分部积分，后者凑微分用公式。

(6) $\frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C$。提示：分部积分

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right) = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} + \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} + x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x。$$

(7) $-\frac{1}{2(1+x^2)}\arctan x + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{x}{4(1+x^2)} + C$。提示：利用递推公式

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2} + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)。$$

(8) $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C$。提示：令 $\arcsin x = t$，则 $x = \sin t\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x = \int t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int t\cos 2t\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}\int \sin 2t\mathrm{d}t。$$

练习题 3-2 答案与提示

1. (1) 2。提示：$\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x = 2$，或利用定积分的几何意义

$$\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = 2。$$

(2) $\pi-\dfrac{4}{3}$。提示：利用定积分性质，拆分，利用三角函数定积分公式

$$\int_0^{\pi}(1-\sin^3 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x=\pi-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=\pi-2\cdot\frac{2!!}{3!!}=\pi-\frac{4}{3}。$$

(3) $\dfrac{7}{256}\pi$。提示：变形，利用三角函数定积分公式

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^8 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\cos^8 x-\cos^{10} x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10} x\mathrm{d}x$$

$$=2\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{9!!}{10!!}\cdot\frac{\pi}{2}。$$

(4) $\dfrac{4}{5}$。提示：变形，利用三角函数定积分的性质和公式

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cos 2x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x(2\cos^2 x-1)\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x=4\cdot\frac{4!!}{5!!}-2\cdot\frac{2!!}{3!!}。$$

(5) $\dfrac{\pi}{2ab}$。提示：求出原函数，利用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x(a^2\tan x^2+b^2)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\tan x^2+b^2}\mathrm{d}\tan x$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}。$$

(6) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$。提示：凑微分，凑成正弦函数定积分，令 $\sqrt{\sin x}=u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}\sin x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1-u^2)u}2u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u。$$

2. (1) $1-2\ln 2$。提示：做变量代换，令 $\sqrt{1-x}=u$，则 $x=1-u^2$，$\mathrm{d}x=-2u\mathrm{d}u$，于是

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{u-1}(-2u)\mathrm{d}u=-2\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{u}{u-1}\mathrm{d}u=-2\int_{\frac{1}{2}}^{0}\mathrm{d}u-2\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u。$$

(2) $\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。提示：做变量代换，令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2 t\sec t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t。$$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{8a^2}$。提示：做变量代换，令 $x=a\sec t$，则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$，于是

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{a\tan t}{\sec^4 t}\sec t\tan t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\mathrm{d}\sin t。$$

(4) $\dfrac{\pi a^4}{16}$。提示：做变量代换，令 $x=a\sin u$，则 $\mathrm{d}x=a\cos u\mathrm{d}u$，于是

$$\int_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 u\cdot a\cos u\cdot a\cos u\mathrm{d}u=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 u-\sin^4 u)\mathrm{d}u。$$

3. (1) $-\dfrac{\pi^2}{4}$。提示：根据符号函数定义，利用积分区间的可加性

$$\int_0^{\pi}x\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}x。$$

(2) $\dfrac{3}{\pi}(1+\sqrt{3})$。提示：根据取整函数定义，利用积分区间的可加性

$$\int_0^3[x]\sin\frac{\pi x}{6}dx=\int_0^1[x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_1^2[x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_2^3[x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$$
$$=\int_0^1 0\cdot\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_1^2 1\cdot\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_2^3 2\cdot\sin\frac{\pi x}{6}dx=\int_1^2\sin\frac{\pi x}{6}dx+2\int_2^3\sin\frac{\pi x}{6}dx。$$

(3) $\frac{20}{3}$。提示：根据最值函数定义，利用积分区间的可加性

$$\int_{-2}^2\max\{1,x^2\}dx=\int_{-2}^{-1}\max\{1,x^2\}dx+\int_{-1}^1\max\{1,x^2\}dx+\int_1^2\max\{1,x^2\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_{-1}^1dx+\int_1^2x^2dx。$$

(4) $\frac{\pi^2}{8}$。提示：利用三角函数的积分公式、积分区间的可加性

$$\int_0^\pi\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4x}dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4x}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^4x}d\sin^2x-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{1}{1+\sin^4x}d\sin^2x。$$

4. (1) $\frac{\pi}{2}$。提示：$\int_{-1}^1\frac{x^3\sin^2x+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^1\frac{x^3\sin^2x}{x^2+1}dx+\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+1}dx=0+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$。第一个积分的被积函数是奇函数，第二个积分的被积函数是偶函数。

(2) $\frac{8}{3}n$。提示：$|\cos x|$是以π为周期的函数，根据周期函数的定积分性质

$$\int_0^{2n\pi}|\cos^3x|dx=2n\int_0^\pi|\cos^3x|dx=4n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^3x|dx=4n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3xdx=\frac{8}{3}n。$$

(3) 1。提示：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx$。由于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{e^{-u}}{e^{-u}+1}\cos u(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^u+1}\cos udu=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^x+1}\cos xdx,$$

于是$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^x+1}\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x+1}\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$。

(4) $2-\sqrt{2}$。提示：$\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}$是奇函数。$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx$。

(5) ln2。提示：$\int_{-1}^1\frac{x+|x|}{1+x^2}dx=\int_{-1}^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^1\frac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$。

(6) $\frac{\pi}{8}$。提示：拆分，第一个被积函数是偶函数、第二个奇函数、第三个是奇函数，有

$$\int_{-1}^1(x^2-2x+\sin x)\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^1x^2\sqrt{1-x^2}dx-2\int_{-1}^1x\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^1\sin x\sqrt{1-x^2}dx$$
$$=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\cos^2\alpha d\alpha(令x=\sin\alpha)。$$

(7) $\frac{\pi}{2}$。提示：拆分，利用周期函数的定积分性质，有

$$\int_{2012}^{2012+\pi}\sin^22x(\tan x+1)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^22x\tan xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^22xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^22xdx。$$

(8) 200。提示：$|\cos2x|$是以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期函数，于是

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+100\pi}|\cos2x|dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+200\cdot\frac{\pi}{2}}|\cos2x|dx=200\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx=400\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx=200。$$

5. (1) $\frac{\pi}{2}-1$。提示：分部积分，并做变量代换。令 $x=\sin u$，则

$$\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\mathrm{d}u。$$

(2) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$。提示：分部积分

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x。$$

(3) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$。提示：$(x\sin x)^2=x^2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\cos 2x$，并且

$$\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x。$$

(4) 1。提示：$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}-\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1$。

6. (1) $\frac{1}{4}(\pi-1)$。提示：令 $x=\frac{\pi}{2}-u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^3 u}{\sin u+\cos u}(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x，于是$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)\mathrm{d}x。$$

(2) $\frac{3}{16}\pi$。提示：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\sin^4 x\mathrm{d}x$。令 $x=-t$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\sin^4 x\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}\sin^4 t(-\mathrm{d}t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\sin^4 t\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\sin^4 x\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\sin^4 x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x。$$

(3) $\frac{\pi^2}{4}$。提示：$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x\left(第二个积分换元，令\ x=\frac{\pi}{2}+u\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}u}{\sin^{2n}u+\cos^{2n}u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x。$$

(4) 0。提示：令 $x=u+\pi$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\mathrm{d}x = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\sqrt{1-\cos 2u}}\mathrm{d}u$，由于 $\frac{\sin u}{\sqrt{1-\cos 2u}}$ 是奇函数，所以积分值为零。

(5) $n^2\pi$。提示：令 $x=n\pi-u$，则

$$\int_0^{n\pi}x|\cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\cos u|\mathrm{d}u = \int_0^{n\pi}n\pi|\cos u|\mathrm{d}u - \int_0^{n\pi}u|\cos u|\mathrm{d}u，所以$$

$$\int_0^{n\pi}x|\cos x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi}|\cos u|\mathrm{d}u = \frac{1}{2}n^2\pi\int_0^{\pi}|\cos u|\mathrm{d}u = n^2\pi。$$

(6) $\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$。提示：令 $x=1-t$，则 $dx=-dt$，于是

$$\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx=\int_0^1\frac{1-x}{e^x+e^{1-x}}dx=\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{1-x}}dx-\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx,$$

$$\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+e}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(e^x)^2+e}de^x。$$

7. (1) -4。提示：分部积分

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1\ln x\,d\sqrt{x}=\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=-4\sqrt{x}\Big|_0^1=-4。$$

(2) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln2$。提示：分部积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln2。$$

(3) π。提示：令 $\sqrt{x-1}=u$，则 $x=u^2+1$，$dx=2udu$，于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+1)u}du=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=2\arctan u\Big|_0^{+\infty}=\pi。$$

(4) $\frac{1}{3}\ln2$。提示：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^3)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^3}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{1+x^3}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{3}\ln2$。

8. 2。提示：分部积分

$$\int_0^1xf''(2x)dx=\int_0^1xf''(2x)dx=\frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1f'(2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1。$$

9. $f(x)=e^x+2(1-e)$。提示：对方程两边在区间[0,1]定积分，注意到 $\int_0^1\left[\int_0^1f(x)dx\right]dx=\int_0^1f(x)dx$，则 $\int_0^1f(x)dx=\int_0^1e^xdx+2\int_0^1f(x)dx$，于是 $\int_0^1f(x)dx=-\int_0^1e^xdx=(1-e)$，所以 $f(x)=e^x+2(1-e)$。

10. $\frac{1}{2}(\cos1-1)$。提示：将函数代入积分中，看作累次积分，交换积分的上下限，确定重积分的积分区域，交换累次积分的积分次序，得到

$$\int_0^1xf(x)dx=\int_0^1x\left(\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx=\int_0^1xdx\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt=-\int_0^1xdx\int_{x^2}^1\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=-\int_0^1dt\int_0^{\sqrt{t}}\frac{x\sin t}{t}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin t\,dt=\frac{1}{2}(\cos1-1)。$$

11. $\frac{7}{3}-e^{-1}$。提示：换元，令 $x-2=u$，则

$$\int_1^3f(x-2)dx=\int_{-1}^1f(u)du=\int_{-1}^0f(u)du+\int_0^1f(u)du=\int_{-1}^0(1+x^2)dx+\int_0^1e^{-x}dx。$$

12. $\frac{3}{4}$。提示：令 $2x-t=u$，则 $t=2x-u$，$dt=-du$，于是 $\int_0^xtf(2x-t)dt=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du=\arctan x$，两边求导，得到

$$2\int_x^{2x}f(u)du+2x[2f(2x)-f(x)]-4xf(2x)+xf(x)=2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)=\frac{1}{1+x^2}。$$

取 $x=1$，得到 $2\int_1^2f(u)du-f(1)=\frac{1}{2}$，即 $\int_1^2f(u)du=\frac{3}{4}$。

13. $\frac{1}{2}\ln^2 x$。提示：由于 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt \xlongequal{\frac{1}{t}=u} \int_1^{u}\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}du\right)=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}du$，所以

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}du=\int_1^x\frac{\ln u}{u}dt=\frac{1}{2}\ln^2 u\,\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x。$$

考研真题答案

数一真题答案：1. A；2. $\frac{\sqrt{e}}{2}$；3. C；4. 证明略；5. D；6. D；7. B；8. $\frac{\pi}{2}$；9. D；10. $\frac{\pi^2}{4}$；11. C；12. C；13. $2\ln 2-2$；14. $e^x\arccos e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$。

数三真题答案：1. $-\frac{1}{2}$；2. C；3. C；4. ln2；5. $x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C$；6. D；7. (i)略，(ii)0；8. $2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$；9. B；10. ln2；11. $\frac{1}{2}$；12. $\frac{\pi^3}{2}$；13. C；14. $e^x\arccos e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$。

第 4 章

连续性定理与微积分中值定理

基本结论

1. 连续性定理：零点定理、介值定理、最值定理；
2. 微分中值定理：费马定理、罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒公式；
3. 积分中值定理；
4. 定积分柯西不等式、定积分绝对值不等式。

基本方法

1. 方程根(函数零点)的讨论；
2. 证明不等式：函数不等式、二元不等式；
3. 存在一点满足等式的证明；
4. 存在两点满足等式的证明；
5. 定积分等式的证明；
6. 定积分存在性的证明；
7. 定积分不等式的证明。

4.1 不等式与存在性的证明

一、基本结论

定理 1 连续性定理

1(零点定理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

2(最值定理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上可以取到最大值和最小值，即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$使得 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，m，M 分别是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值。

3(介值定理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$存在最小值 m 和最大值 M，且对任意的 $C(m\leqslant C\leqslant M)$，$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$。

零点定理的推广形式

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)\leqslant 0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

介值定理的特殊形式

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ (x_1 < x_2)$，和 $\forall C \in [f(x_1), f(x_2)]$ 或 $\forall C \in [f(x_2), f(x_1)]$，都存在 $\xi \in [x_1, x_2]$，使得 $f(\xi) = C$。

零点定理的几何意义：对于连接不断的曲线，若一个端点在 x 轴的上方，另一个端点在 x 轴下方，则曲线与 x 轴至少有一个交点，这点的函数值等于零。

定理 2　微分中值定理

1(费马定理)　如果 x_0 是极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$。

2(罗尔定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a) = f(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

罗尔定理的推广：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $\exists x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$，有 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$。

3(拉格朗日定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)。$$

4(柯西定理)　若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}。$$

5(泰勒公式和麦克劳林公式)

泰勒公式：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内 $U(x_0)$ 具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 在 x 和 x_0 之间，有时把 ξ 表示为 $x_0 + (x-x_0)\theta, 0<\theta<1$。

麦克劳林公式：设 $f(x)$ 在 0 的某个邻域内 $U(0)$ 具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(0)$，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 在 0 和 x 之间，有时把 ξ 表示为 $x\theta, 0<\theta<1$。

注　根据泰勒公式和麦克劳林公式的表达式，如果函数 $f(x)$ 中的自变量 x 变化，则存在的 ξ 也在变化。

微分中值定理建立了函数、自变量与导数之间的联系。函数的许多性质可以用自变量、函数和导函数的关系来描述，因此我们常用微分中值定理来研究函数的性质。

注　连续性定理和微分中值定理的特征

(1) 若证明存在一点，使**连续函数**在这点的**函数值**满足某个等式，常应用连续性定理：零点定理和介值定理，其中最常用的是零点定理；

(2) 若证明存在一点，使函数在这点的**导函数值**满足某个等式，常应用微分中值定理：罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒公式，其中最常用的是罗尔定理；

(3) 罗尔定理、拉格朗日定理仅仅涉及一个函数，而柯西中值定理涉及两个函数；

(4) 若题设涉及高阶导数，特别是三阶或三阶以上的导数，常应用泰勒公式。

注　零点定理、最值定理和介值定理统称为**连续性定理**；费马定理、罗尔定理、拉格朗日定理和泰勒公式统称为**微分中值定理**。

二、基本方法

题型 1　方程根(函数零点)的讨论

方程 $f(x)=0$ 的根与函数 $f(x)$的零点是同一个问题,因此讨论方程根的问题,大都是把一端化为 0,讨论另一端函数的零点问题。关于方程的根有两类问题:

1. 方程根的存在性:主要应用零点定理和介值定理。

2. 方程根的个数:将函数的定义域分成若干单调区间,判断每个单调区间是否存在零点。若在单调区间的一端点处函数值大于零,另一端点处函数值小于零,则在这个单调区间仅有一个零点,若端点函数值同号则没有零点,从而得到函数在定义域上零点的个数,以及零点所处的位置(范围)。

例 4.1　证明:方程 $x^5-5x+2=0$ 在区间$(0,1)$内有唯一实根。

证明　令 $f(x)=x^5-5x+2$,显然 $f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(0)=2>0$,$f(1)=-2<0$,根据零点定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$。

在区间$(0,1)$内,由于 $f'(x)=5(x^4-1)<0$,所以 $f(x)$是单调的,因此在区间$(0,1)$内,ξ 是函数 $f(x)$的唯一零点,故方程 $x^5-5x+2=0$ 在区间$(0,1)$内有唯一实根。

例 4.2　证明:方程 $x\ln x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$ 只有一个实根。

证明　设 $f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,则 $f'(x)=\ln x+1$。令 $f'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。显然在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$上,$f'(x)<0$,于是 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$单调减少;在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上,$f'(x)>0$,于是 $f(x)$ 在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$单调增加,而 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$,所以方程 $x\ln x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$ 只有一个实根。

例 4.3　讨论方程 $x^3-3x=c$ 中的常数 c,在什么情况仅有一个实根,两个实根,三个实根?

解　令 $f(x)=x^3-3x-c$,则 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$。令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=1$。用这两个点将定义域分成$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$和$(1,\infty)$。

在$(-\infty,-1)$上,$f'(x)>0$,$f(x)$单调增加;在$(-1,1)$上,$f'(x)<0$,$f(x)$单调减少;在$(1,\infty)$上,$f'(x)>0$,$f(x)$单调增加,如图 4-1 所示。

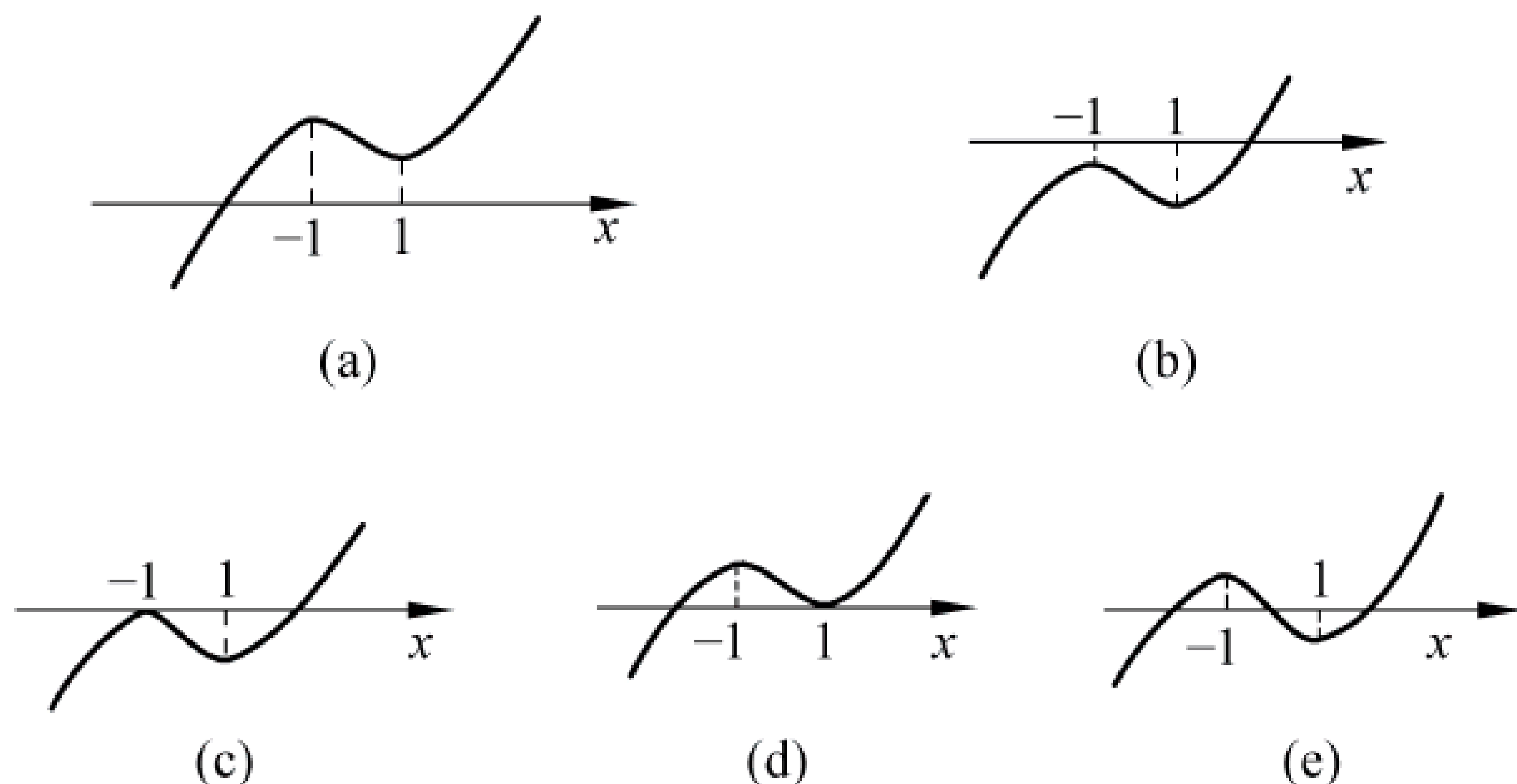


图　4-1

当 $f(1)>0$ 或 $f(-1)<0$ 时,函数 $y=f(x)$图像与 x 轴仅有一个交点,如图 4-1(a)和

(b)所示；

当 $f(-1)=0$ 或 $f(1)=0$ 时，函数 $y=f(x)$ 图像与 x 轴有两个交点，如图 4-1(c)和(d)所示；

当 $f(-1)>0$ 且 $f(1)<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 图像与 x 轴有三个交点。如图 4-1(e)所示。

由于 $f(-1)=2-c$，$f(1)=-2-c$，所以：

(1) 当 $c>2$ 或 $c<-2$ 时，方程仅有一个实根；

(2) 当 $c=2$ 或 $c=-2$ 时，方程有且仅有两个实根；

(3) 当 $-2<c<2$ 时，方程有三个实根。

例 4.4 讨论方程 $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2$ 在 $(0,2\pi)$ 内根的个数。

解 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}-2$，则

$$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)}{\sin^2 x\cos^2 x},$$

于是在 $(0,2\pi)$ 内导数等于零和导数不存在的点有：$x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}$，用这五个点将 $(0,2\pi)$ 分成六个单调区间：$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right),\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right),\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$。

(1) 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}-2>0$，在此区间函数无零点；

(2) 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上，由于 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}-2>0$，$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$，在此区间函数无零点；

(3) 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上，由于 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to \pi^-}f(x)=+\infty$，在此区间函数有一个零点；

(4) 在 $\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 上，由于 $\lim\limits_{x\to \pi^+}f(x)=-\infty$，$f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}-2<0$，在此区间函数无零点；

(5) 在 $\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上，由于 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}-2<0$，$\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-}f(x)=-\infty$，在此区间函数无零点；

(6) 在 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上，由于 $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 2\pi^-}f(x)=-\infty$，在此区间函数有一个零点；

函数图像大致如图 4-2 所示。

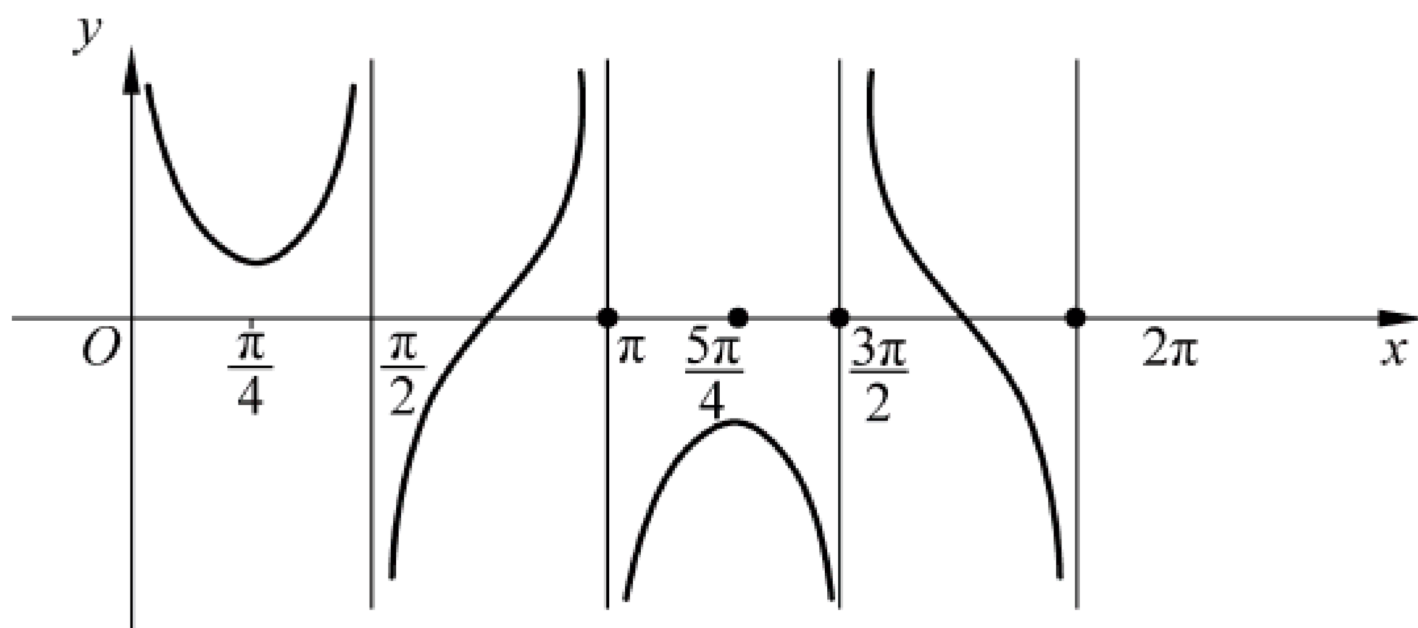


图 4-2

综上所述，方程在$(0,2\pi)$上有两个实根。

例 4.5 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上有连续导数，且$f'(x)\geqslant k>0$，$f(0)<0$，证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上仅有一个零点。

分析 我们并不知道$f(x)$的表达式，所以讨论$f(x)$的零点情形只能借助已知条件，即$f'(x)\geqslant k>0$，$f(0)<0$，而将$f(x)$、$f'(x)$和$f(0)$建立必要的联系的是拉格朗日定理。

证明 $f(x)$在$[0,x]$上应用拉格朗日定理，得到

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi),\quad 0<\xi<x。$$

由于$x\in[0,+\infty)$，从而有$f(x)\geqslant f(0)+xk$，根据$k>0$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。又由于$f(0)<0$，所以一定存在零点。又由于$f'(x)\geqslant k>0$，函数$f(x)$单调增加，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上仅有一个零点。

例 4.6 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上有$f''(x)\leqslant 0$且$f(1)=2$，$f'(1)=-3$，证明：在$[1,+\infty)$上，方程$f(x)=0$仅有一实根。

分析 我们并不知道$f(x)$的表达式，所以讨论$f(x)$的零点情形只能借助已知条件，即$f''(x)\leqslant 0$，$f(1)=2$和$f'(1)=-3$。而将$f(x)$、$f''(x)$，$f(1)=2$和$f'(1)=-3$建立必要的联系的是泰勒公式。

证明 根据泰勒公式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2,\quad 1<\xi<x。$$

由于$x\in[1,+\infty)$，根据已知条件得到

$$f(x)\leqslant 2-3(x-1)=-3x+5,$$

显然$f(2)<0$。又由于$f(1)=2$且$f(x)$连续，所以$f(x)$在区间$(1,2)$上存在零点，即方程$f(x)=0$在$[1,+\infty)$上有实根。

下面证明唯一性：只需证明$f(x)$是单调的，即证明$f'(x)<0$或$f'(x)>0$。事实上，由于$f''(x)\leqslant 0$，则$f'(x)$是递减的，而$f'(1)=-3$，所以在$[1,+\infty)$上，$f'(x)<0$，所以$f(x)$是单调递减的。综上所述，在$[1,+\infty)$上，方程$f(x)=0$仅有一实根。

例 4.7 求证：方程$e^x=ax^2+bx+c$的根不超过三个。

分析 本题的结论是否定形式，所以用反证法。

证明 令$F(x)=e^x-(ax^2+bx+c)$，若函数$F(x)$有四个零点，不妨设为

$$x_1<x_2<x_3<x_4,\quad 即\quad F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)=F(x_4)=0。$$

显然$F(x)$在$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$，$[x_3,x_4]$上均满足罗尔定理条件，于是存在三点$\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3$，其中$\zeta_1\in(x_1,x_2)$，$\zeta_2\in(x_2,x_3)$，$\zeta_3\in(x_3,x_4)$，使得

$$F'(\zeta_1)=F'(\zeta_2)=F'(\zeta_3)=0。$$

同样，对导函数$F'(x)$在$[\zeta_1,\zeta_2]$，$[\zeta_2,\zeta_3]$上应用罗尔定理，则存在两点$\eta_1<\eta_2$，其中

$$\eta_1\in(\zeta_1,\zeta_2),\eta_2\in(\zeta_2,\zeta_3),\quad 且\quad F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0。$$

类似地，对二阶导函数$F''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上应用罗尔定理，则存在一点$\xi\in[\eta_1,\eta_2]$，使得

$$F'''(\xi)=0。$$

而$F'''(x)=e^x$，于是有$e^\xi=0$，这是个矛盾结果。

讨论方程根的方法综述

(1) 对具体函数来说，讨论方程根（函数零点）的存在性、根的个数、根的范围是比较简

单的问题，只需求出单调区间，判断每个单调区间是否有根，就可以得到所需结论。

（2）对抽象函数来说，讨论方程 $f(x)=0$ 根（函数 $f(x)$ 零点）的存在性，往往都要借助导函数 $f'(x)$ 的性质。于是在研究函数 $f(x)$ 的性质时，通常利用微分中值定理：拉格朗日定理和泰勒公式，建立 $f(x)$ 和 $f'(x)$，$f''(x)$ 的必要联系，依此研究函数 $f(x)$。

（3）若利用零点定理，往往需要找到两点，使得一点函数值大于零，另一点函数值小于零。但如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则在区间 (a,b) 上也一定存在零点。这是因为由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，在 (a,b) 上一定存在两点：一点函数值大于零，另一点函数值小于零，所以也存在零点，例 4.5 就是利用这一原理。

题型 2 证明不等式

把含有一个变量的不等式称为一元不等式，又称函数不等式，如 $\sin x\leqslant x(0\leqslant x\leqslant\pi)$；把含有两个变量或字母的不等式称为二元不等式，如 $a^2+b^2\geqslant 2ab$。于是常见的不等式分为两类：**函数不等式和二元不等式**。

证明不等式是高等数学证明题中的常见问题，就一般问题而言，证明函数不等式有三个常用方法：利用单调性证明，利用最值证明，利用微分中值定理证明；证明二元不等式有两个常用方法：利用凸凹性证明，将二元不等式看作函数不等式，利用单调性证明。

方法 1 利用单调性证明函数不等式

我们可以将所证的不等式一端化为 0，另一端是我们要研究的函数，利用函数的单调性，证明所研究的函数大于零（小于零）。结论如下：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导：

情形 1 若 $f'(x)>0$（或 $f'(x)\geqslant 0$，但使 $f'(x)=0$ 点最多有有限个），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，如图 4-3(a)，(b) 所示，于是有：

（1）当 $f(a)=0$ 时，在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$；在 (a,b) 内，$f(x)>0$，如图 4-3(a)；

（2）当 $f(b)=0$ 时，在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant 0$；在 (a,b) 内，$f(x)<0$，如图 4-3(b)。

情形 2 若 $f'(x)<0$（或 $f'(x)\leqslant 0$，但使 $f'(x)=0$ 点最多有有限个），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，如图 4-3(c)，(d) 所示，于是有：

（1）当 $f(a)=0$ 时，在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant 0$；在 (a,b) 内，$f(x)<0$，如图 4-3(c)；

（2）当 $f(b)=0$ 时，在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$；在 (a,b) 内，$f(x)>0$，如图 4-3(d)。

上述结论借助几何图形的直观性更容易理解、掌握。

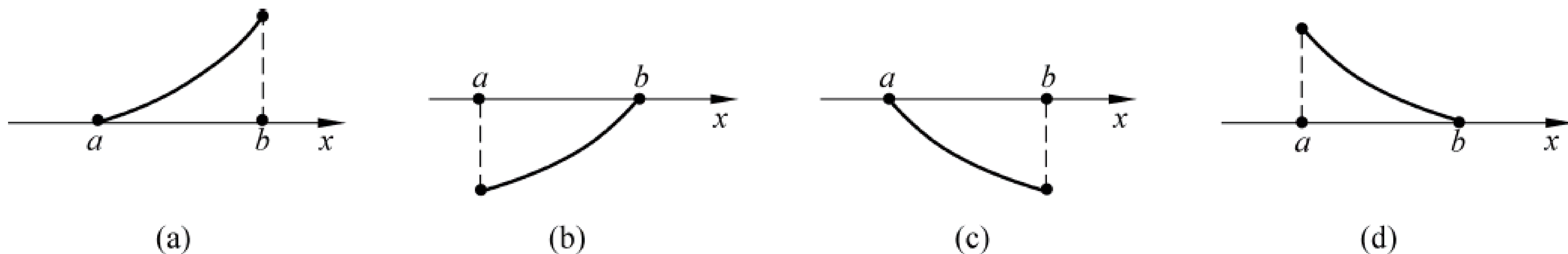


图 4-3

例 4.8 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明：

（1）$\sin x+\tan x>2x$； （2）$\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$。

证明 (1) 将不等式的一端化为0,另一端就是我们要研究的函数,于是设

$$f(x)=\sin x+\tan x-2x,$$

则

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec x\cdot\sec x\tan x=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)>0,$$

所以,函数 $f'(x)$ 单调递增。由于 $f'(0)=0$,于是在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上单调递增。又由于 $f(0)=0$,从而在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上,$f(x)>0$,即

$$\sin x+\tan x>2x。$$

(2) 设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$,则

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x)。$$

由于 $\tan x+x>0$,为了确定 $\tan x-x$ 的符号,我们再令 $g(x)=\tan x-x$,则

$$g'(x)=\sec^2 x-1>0,$$

于是 $g(x)$ 单调递增,由于 $g(0)=0$,因此在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上,$g(x)>0$,于是 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 单调递增。由于 $f(0)=0$,所以在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上,$f(x)>0$,即 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$。

例 4.9 设 $x>0,a>\mathrm{e}$,证明:$(a+x)^a<a^{a+x}$。

证明 为了证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$,只需证明 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln(a+x)}{a+x}$。于是令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\quad x>\mathrm{e},$$

所以,函数 $f(x)$ 单调减少,由于 $a+x>a>\mathrm{e}$,则 $f(a+x)<f(a)$,因此 $\frac{\ln(a+x)}{a+x}<\frac{\ln a}{a}$,即 $(a+x)^a<a^{a+x}$。

例 4.10 证明:当 $0<x<\pi$ 时,$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$。

证明 【方法 1】利用凸函数性质:令 $F(x)=\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{\pi}$,则 $F''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}<0$,所以 $F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上是上凸的,而 $F(0)=F(\pi)=0$,所以在 $0<x<\pi$ 上,$F(x)>0$,即

$$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}。$$

【方法 2】变形,证明它的等价不等式。若证明 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$,只需证明 $\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\frac{1}{\pi}>0$,于是令 $F(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\frac{1}{\pi}$,则

$$F'(x)=\frac{\frac{1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\cos\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)<0。$$

因此 $F(x)$ 在 $0<x<\pi$ 上单调递减。由于 $F(\pi)=0$，于是在 $0<x<\pi$ 上，$F(x)>0$。故

$$F(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\frac{1}{\pi}>0,\quad 0<x<\pi,$$

于是有

$$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi},\quad 0<x<\pi。$$

利用单调性证明函数不等式方法综述

(1) 利用单调性证明不等式，常常需要判断 $f'(x)$ 的符号，但是当没办法直接判断导函数 $f'(x)$ 正负时，我们可以求二阶导函数 $f''(x)$ 乃至三阶导数，通过 $f''(x)$ 的正负，来确定 $f'(x)$ 正负，如例 4.8(1)，或单独考虑导函数 $f'(x)$ 的部分因子的符号，令这部分为 $g(x)$，再用这个方法，讨论 $g(x)$ 的正负，从而确定 $f'(x)$ 的正负，如例 4.8(2)。

(2) 在证明不等式时，往往把不等式一端化为 0，另一端就是我们研究的函数，若这个函数不是单调的，或不明确是怎样的函数，如例 4.9 和例 4.10，我们往往对不等式**变形**，考虑引入新的辅助函数，使这个辅助函数是单调的。

方法 2　利用最值证明函数不等式

如果我们所研究的函数在指定的区间上并非是单调的，我们可以通过求函数在指定区间的最大值或最小值，来建立并证明不等式。

例 4.11　证明：$\forall x>-1$ 和 $p>1$，有 $(1+x)^p\geqslant 1+px$。

证明　令 $f(x)=(1+x)^p-1-px$，则 $f'(x)=p(1+x)^{p-1}-p=p[(1+x)^{p-1}-1]$，显然，$f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 有时大于 0，有时小于 0，从而说明 $f(x)$ 并非是单调的。

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$。用 $x=0$ 将 $(-1,+\infty)$ 分成两个区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$。

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，于是 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增。

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上的最小值点，$f(0)$ 是最小值，由于 $f(0)=0$，于是 $\forall x>-1$，有 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $(1+x)^p\geqslant 1+px$。

例 4.12　证明：当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|x^3-3x|\leqslant 2$。

证明　事实上，我们只要证明：$f(x)=x^3-3x$ 在 $[-2,2]$ 上的最值的绝对值不超过 2 即可，或者说只要求出函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上最大值和最小值即可。

由于 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 和 $x=-1$，于是函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $[-2,2]$ 上的最值：

$$M=\max\{f(-2),f(-1),f(1),f(2)\}=2;$$

$$m=\min\{f(-2),f(-1),f(1),f(2)\}=-2。$$

于是当 $|x|\leqslant 2$ 时，有 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$，即 $|f(x)|=|x^3-3x|\leqslant 2$。

注　例 4.11 与例 4.8(1)是不同的，例 4.8(1)中的 $f'(x)$ 的符号是没办法直接判断大于零、小于零，还是符号不一致，因此求二阶导数。而例 4.11 的 $f'(x)$ 的符号是可以确定的，它在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上符号不一致，非单调的，是不能用单调性来证明的。

方法 3 利用微分中值定理证明函数不等式

如果所证不等式表现为一个函数的两点函数值的差，我们往往考虑利用拉格朗日中值定理证明这个不等式；如果所证不等式表现为两个函数在两点函数值的差的商，可以考虑利用柯西中值定理证明不等式。

(1) 若 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足**拉格朗日中值定理**的条件，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)。$$

其中 $x_1<\xi<x_2$，根据 $x_1<\xi<x_2$ 得到? $<f'(\xi)<$?，以此证明不等式。

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足**柯西中值定理**的条件，则

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}。$$

其中 $x_1<\xi<x_2$，根据 $x_1<\xi<x_2$ 得到? $<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<$?，以此证明不等式。

例 4.13 证明不等式：$\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}(x>0)$。

证明 由于 $\ln(x+1)-\ln x$ 是 $\ln t$ 在 x 和 $1+x$ 两点函数值的差，于是令 $f(t)=\ln t$，$f(t)$ 在 $[x,1+x](x>0)$ 上满足拉格朗日中值定理条件，则有

$$f(1+x)-f(x)=f'(\xi),\quad x<\xi<1+x,\text{即}\ \ln(x+1)-\ln x=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}。$$

由于 $x<\xi<1+x$，于是 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$，因此

$$\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x},\qquad x>0。$$

例 4.14 证明不等式：$\ln(x+1)>\frac{\arctan x}{x+1}(x>0)$。

证明 【方法 1】柯西中值定理：设 $f(t)=\ln(t+1)$ 和 $g(t)=\arctan t(t>0)$。显然 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足柯西中值定理条件，则有

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad 0<\xi<x。$$

根据 $0<\xi<x$，则有

$$\frac{\ln(x+1)-0}{\arctan x-0}=\frac{\frac{1}{1+\xi}}{\frac{1}{1+\xi^2}}=\frac{1+\xi^2}{1+\xi}>\frac{1}{1+x},$$

因此有

$$\ln(x+1)>\frac{\arctan x}{x+1},\quad x>0。$$

【方法 2】利用函数的单调性证明：设 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\arctan x$，$x>0$，则

$$f'(x)=\ln(x+1)+1-\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}。$$

显然 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，根据 $f'(0)=0$，因此 $f'(x)>0(x>0)$，所以 $f(x)$ 单调递增。由于 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $(x+1)\ln(x+1)-\arctan x>0$，故

$$\ln(x+1)>\frac{\arctan x}{x+1},\qquad x>0。$$

例 4.15 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M(M>0)$，且 $f(x)$在(a,b)内取最大值。求证：$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$。

分析 此题的条件和结论涉及导数和二阶导数，从题的特征看，能充分地利用已知条件的最好方法就是对导函数 $f'(x)$应用拉格朗日中值定理。问题是：

(1) 对导函数 $f'(x)$的哪两个点(闭区间)应用拉格朗日定理？

(2) 怎样利用 $f(x)$在(a,b)内取到最大值的条件？

这就需要考虑取到最大值性质，最好和导数相关的性质，根据费马定理：在区间内部的最大值点，一定是极值点，若可导，这点导数等于零。

证明 由于 $f(x)$在(a,b)内取最大值，由费马定理，存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$。于是 $f'(x)$分别在$[a,x_0]$上和$[x_0,b]$上应用拉格朗日定理，有

$$f'(x_0)-f'(a)=f''(\xi)(x_0-a)\Rightarrow |f'(a)|\leqslant M(x_0-a),\quad a<\xi<x_0,$$

和

$$f'(b)-f'(x_0)=f''(\eta)(b-x_0)\Rightarrow |f'(b)|\leqslant M(b-x_0),\quad x_0<\eta<b。$$

因此有$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$。

前面给出三种方法证明函数不等式，即利用单调性证明不等式，利用最值证明不等式，利用微分中值定理证明不等式。对于二元不等式，我们可用两种方法证明：(1)利用凸凹性证明；(2)将二元不等式转化为函数不等式，利用单调性去证明。

方法 4 利用凸凹性证明二元不等式

当证明的不等式是二元不等式，即不等式中出现两个变量，或两个字母，表现为两个变量函数值的和，或两个变量和的函数值，往往要考虑利用凸凹性证明不等式。

关于凸凹性不等式：

若 $f''(x)>0$，则 $f(x)$是区间 I 是凹函数，于是$\forall x_1,x_2\in I$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

若 $f''(x)<0$，则 $f(x)$是区间 I 是凸函数，于是$\forall x_1,x_2\in I$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}。$$

例 4.16 求证：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\leqslant a^a b^b, a,b>0$。

证明 此不等式等价于$\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{1}{2}(a\ln a+b\ln b)$。令 $f(x)=x\ln x$，则 $f''(x)=\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内是凹函数，于是对任意的 $a,b>0$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)],\quad 即\quad \frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{1}{2}(a\ln a+b\ln b),$$

所以有

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\leqslant a^a b^b,\quad a,b>0。$$

方法 5 将二元不等式转化为函数不等式，利用单调性证明

如果证明的不等式是二元不等式，不等式中出现两个变量，或两个字母，可将其中一个

量看作变量，另一个量看作常量，把二元不等式转化为或视为函数不等式，然后利用单调性证明此类不等式。

例 4.17 求证：$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y, x,y>0$。

证明 此不等式是二元不等式，选定字母 y 作为常量，另一个字母 x 作为变量，将这个不等式视为关于 x 的函数不等式。

不妨令 $x\geqslant y>0$（若 $y\geqslant x>0$，把 y 看作变量），且记

$$f(x)=(x+y)\ln\frac{x+y}{2}-x\ln x-y\ln y,\quad x\geqslant y>0,$$

由于 $x\geqslant y>0$，则

$$f'(x)=\ln\frac{x+y}{2}-\ln x\leqslant 0,$$

所以 $f(x)$ 单调减少，于是 $f(x)\leqslant f(y)=0$，故

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y,\quad x,y>0。$$

注 例 4.17 也可以用凸凹性来证明。

证明不等式方法综述

1. 对于函数不等式，可把不等式一端化为 0，另一端化为一个一元函数，一般可考虑利用单调性去证明，若非单调，可考虑利用最值去证明。

2. 对于函数不等式，把不等式一端化为 0，另一端是讨论的函数，如果这个函数既不是单调的，又没办法求其函数的最值，此时考虑将不等式变形，转化为新的不等式，引入辅助函数，使这个辅助函数是单调的。

3. 对于函数不等式，表现为一个函数的两点函数值的差，一般可考虑利用拉格朗日中值定理去证明，当然有时也可以利用单调性或最值去证明。

4. 对于函数不等式，表示为两个函数的两点函数值的差的商，此时需要考虑利用柯西中值定理去证明，有时也可以利用单调性或最值证明。

5. 对于二元不等式，含有两个变量 x,y，有两个方法证明此类不等式：

(1) 若含有 $f(x)+g(x)$，或 $f(x+y)$，可利用函数的凸凹性证明不等式；

(2) 将二元不等式转化为函数不等式，利用单调性证明。

诚然，对不同的不等式，可采用不同的证明方法，需具体问题具体分析。但是，在证明过程中，将**不等式转化**（**变形**）是证明不等式常用的方法。

题型 3 存在一点满足等式的证明

证明存在一点满足一个等式，应用两类定理：

方法 1 如果所证的存在一点满足的等式，仅用函数就可建立这个等式且已知函数连续，往往用连续性定理：零点定理、介值定理。

方法 2 如果所证的存在一点满足的等式，需要函数的导数方可建立这个等式，常常用微分中值定理：罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理。

诚然，利用微分中值定理证明，特别是罗尔定理，关键的是引入辅助函数。

引入辅助函数有两种方法：

方法1 观察法：将结论中的ξ改为x，一端化为0，另一端就是我们要引入辅助函数的导函数，也就是说，另一端函数的原函数就是要引入的辅助函数；

方法2 解方程法：将结论中的ξ改为x，得到微分方程，解此方程，得到方程的通解，最后将解变形，一端化为任意常数，另一端就是我们要引入的辅助函数。

需要指出的是：解方程方法有时还是比较麻烦的，若回避这个方法，在利用观察法引入比较复杂辅助函数时，可考虑**三种可能情形：**

(1) 变限积分函数与某个函数的积或商；

(2) e^{kx}与某个函数的积；

(3) 两个函数的积或商。

注 和通常是两个函数的积的导数，差通常是两个函数的商的导数。

例如 设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$。证明：

(1) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

(2) 存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

问题(1)的辅助函数：将结论中的ξ改为x，一端是化为0，得到$f'(x)-1=0$，另一端$f'(x)-1$的原函数$f(x)-x$就是我们要引入的辅助函数。

问题(2)的辅助函数：将结论中的η改为x，一端是化为0，得到$f''(x)+f'(x)-1=0$，另一端$f''(x)+f'(x)-1$，为了出现$f''(x)+f'(x)$形式，自然考虑用e^x乘以$f'(x)$，即$e^x f'(x)$，而

$$[e^x f'(x)]' = e^x[f''(x)+f'(x)],$$

于是在这个基础上，再减去e^x，即

$$[e^x f'(x)]' - e^x = e^x[f''(x)+f'(x)] - e^x = e^x[f''(x)+f'(x)-1],$$

所以辅助函数为$F(x)=[f'(x)-1]e^x$。用观察法引入辅助函数有较大难度！

解方程法：将结论化为$[f'(x)]'+f'(x)=1$，于是

$$f'(x) = e^{-\int dx}\left(\int e^{\int dx}dx + C\right) = e^{-x}(e^x+C),$$

所以$[f'(x)-1]e^x=C$，因此辅助函数为$F(x)=[f'(x)-1]e^x$。

如果所证明结论为：存在ξ，满足如下等式：

(1) $f'(\xi)-f(\xi)=1$； (2) $f'(\xi)+f(\xi)=2$；

(3) $f''(\xi)+2f'(\xi)=0$； (4) $f''(\xi)-4f'(\xi)=0$；

(5) $\xi f'(\xi)+f(\xi)=1$； (6) $f'(\xi)-\xi f(\xi)=0$；

(7) $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$； (8) $\xi f''(\xi)-2f'(\xi)=0$。

要怎样引入的辅助函数？答案见本章的习题答案，最后部分。

例4.18 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a\leqslant c<d\leqslant b$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得对任意的正数$p,q$有$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$。

分析 已知函数连续，证明存在一点的函数值满足一个等式，显然应该利用连续性定理。

证明 【方法1】利用零点定理：令$F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$，因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以$F(x)$在$[a,b]$上连续，且

$$F(c)=q[f(c)-f(d)],\quad F(d)=p[f(d)-f(c)]。$$

由于 $p,q>0$,则 $F(c)F(d)\leqslant 0$。根据零点定理,$\exists\xi\in[c,d]\subseteq[a,b]$使得 $F(\xi)=0$,所以有

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)。$$

【方法 2】利用介值定理:由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续,所以 $f(x)$在$[a,b]$上可以取到最大值 M 和最小值 m,于是有 $m\leqslant f(c)\leqslant M,m\leqslant f(d)\leqslant M$,所以

$$pm\leqslant pf(c)\leqslant pM,\quad qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$

故

$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M,$$

从而有

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M。$$

根据介值定理,$\exists\xi\in[a,b]$有 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,所以有

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)。$$

例 4.19 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,且 $g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号,证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

分析 已知 $f(x)$ 是连续函数,证明存在一点的函数值满足一个等式,所以应该用连续性定理:介值定理。利用介值定理只需证明$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 在 $f(x)$ 的最小值和最大值之间。

证明 不妨设 $g(x)\geqslant 0$。由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续,所以可以取到最大值 M 和最小值 m,即 $m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in[a,b]$,从而有 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$,根据积分的保序性则有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x。$$

若 $g(x)\equiv 0$,结论显然成立。若不然,则有$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$,于是

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M。$$

根据介值定理,存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$,即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x。$$

例 4.20 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数,且 $f(0)=0$,证明:$\exists\xi\in[0,1]$使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

分析 尽管题的结论有导数和积分,但考虑到已知条件 $f'(x)$ 在$[0,1]$ 上**连续**,而结论 $f'(\xi)$ 等于某个数值,所以应该对 $f'(x)$ 应用连续性定理:介值定理。利用介值定理,只需证

明 $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 在导函数 $f'(x)$ 的最小值和最大值之间。

证明 由于 $f'(x)$在$[0,1]$上连续,所以 $f'(x)$在$[0,1]$上可以取到最大值 M 和最小值 m。对函数 $f(x)$在$[0,x]$上应用拉格朗日定理得到

$$f(x)-f(0)=xf'(c),\quad 0<c<x,$$

由 $f(0)=0$,两边积分,得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(c)x\mathrm{d}x。$$

由于 $m\leqslant f'(c)\leqslant M$,从而有 $m\int_0^1 x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f'(c)x\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x\mathrm{d}x$,即

$$m\leqslant 2\int_0^1 f'(c)x\mathrm{d}x\leqslant M。$$

所以有 $m\leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$,根据介值定理,$\exists\,\xi\in[0,1]$ 使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

例 4.21 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且 $f(1)=0$,证明:$\exists\,\xi\in(0,1)$,有 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

分析 结论中含有导数,应利用微分中值定理:罗尔定理。但对哪个函数应用罗尔定理成为关键。从结论入手,引入辅助函数:将结论中的 ξ 改为 x,整理得 $xf'(x)+f(x)=0$,左端 $xf'(x)+f(x)$的原函数为 $xf(x)$,所以辅助函数为 $F(x)=xf(x)$。

证明 设 $F(x)=f(x)x$,则 $F(0)=F(1)=0$。由于 $f(x)$在$[0,1]$上可导,所以 $F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件,于是存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$。由于

$$F'(x)=f(x)+xf'(x),$$

于是 $F'(\xi)=f'(\xi)\xi+f(\xi)=0$,即 $\exists\,\xi\in(0,1)$,有 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

例 4.22 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$,证明 $\exists\,\xi\in(0,1)$ 有

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}。$$

分析 根据例 4.21 可知,应对 $F(x)=xf(x)$利用罗尔定理。但由于 $F(x)$在$[0,1]$上不满足罗尔定理的条件($F(0)\neq F(1)$),所以问题的关键是在哪个闭区间上应用罗尔定理,即在$[0,1]$上找点两个点 x_1,x_2,使得 $F(x_1)=F(x_2)$,然后在$[x_1,x_2]$上应用罗尔定理。

证明 设 $F(x)=xf(x)$。由于 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$,由积分中值定理,$\exists\,\eta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使得

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\eta f(\eta)。$$

于是 $F(1)=F(\eta)$。由于 $f(x)$在$[0,1]$上可导,所以 $F(x)$在$[\eta,1]$上满足罗尔定理的条件,则存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$。由于 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$,于是

$$F'(\xi)=f'(\xi)\xi+f(\xi)=0,$$

即,$\exists\,\xi\in(0,1)$有 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

例 4.23 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$可导,且 $f(1)=f(0)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,求证:在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$。

分析 结论中含有导数,应利用微分中值定理:罗尔定理。为引入辅助函数,将结论中的 ξ 改为 x,整理得 $f'(x)-1=0$,左端 $f'(x)-1$ 的原函数为 $f(x)-x$,于是辅助函数是 $F(x)=f(x)-x$。

证明 设 $F(x)=f(x)-x$,显然 $F(0)=0$。由于

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1<0。$$

于是 $F(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上满足零点定理的条件,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\eta)=0$,所以 $F(x)$在闭区间$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$。由于 $F'(x)=f'(x)-1$,所以 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$,即 $f'(\xi)=1$。

例 4.24 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(1)=1$,$f(0)=0$,求证:存在一点 $\xi\in(0,1)$满足 $f(\xi)+f'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}$。

分析 结论中含有导数,应利用罗尔定理。

为了引入辅助函数,将结论中的 ξ 改为 x,有 $f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{1-x}$,此方程是一阶线性非齐次方程。于是

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(x\mathrm{e}+C),$$

所以有 $f(x)\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}=C$,即辅助函数为 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}$。

利用观察法引入辅助函数:将要证明的结论变形得到

$$\mathrm{e}^{\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{\xi}f'(\xi)-\mathrm{e}=0,$$

将 ξ 改为 x 有

$$\mathrm{e}^{x}f(x)+\mathrm{e}^{x}f'(x)-\mathrm{e}=0。$$

这个函数的原函数是什么呢?不难看出,辅助函数是 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}$。

证明 设 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}$,根据已知条件得 $F(0)=F(1)=0$,于是 $F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件,从而存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$。

由于 $F'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{x}+f(x)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}$,于是 $F'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{\xi}+f(\xi)\mathrm{e}^{\xi}-\mathrm{e}=0$,即

$$f(\xi)+f'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}。$$

例 4.25 设 $f(x)$在$[0,1]$二阶可导,且 $f(1)=f(0)$,求证:存在 $\xi\in(0,1)$满足

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}。$$

分析 为了引入辅助函数,将结论中的 ξ 改为 x,则有$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2}{1-x}$,解此微分方程得到 $\ln f'(x)=-\ln(1-x)^2+C$,有 $f'(x)(1-x)^2=\mathrm{e}^{C}$,所以辅助函数为 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$。当然此题的辅助函数也可以通过观察得到:由$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2}{1-x}$得$(1-x)f''(x)+2f'(x)=0$,这个函数的原函数是两个函数 $f'(x)$和$(1-x)^2$ 的积。

证明 令 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$,显然 $F(1)=0$。另外,由于 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且 $f(1)=f(0)$,于是 $f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件,从而存在 $\eta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)=0$。

当然 $F(\eta)=0$,所以 $F(x)$ 在$[\eta,1]$上满足罗尔定理的条件,存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$。由于$F'(x)=-2(1-x)f'(x)+(1-x)^2f''(x)$,所以

$$F'(\xi)=-2(1-\xi)f'(\xi)+(1-\xi)^2f''(\xi)=0,$$

整理得到 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

例 4.26 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$f(0)=0$ 且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$ 满足$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

分析 尽管结论中没有导数,但结论出现积分上限函数和函数,它们仍是原函数和导数的关系,所以也同样要利用微分中值定理:罗尔定理。虽然已知函数连续,但所证明的结论并不是存在一点的函数值满足某个等式,所以不能用连续性定理。为了引入辅助函数,将结论中的 ξ 改为 x,得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x),\quad 或\quad \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{x},$$

解方程得到 $\ln\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\ln x+C$,即$\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=C_1$,所以辅助函数为 $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$。

当然也可以通过观察得到辅助函数。由$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)$ 得$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=0$。如果是和的形式$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)$,显然是$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 x 的积的导数,现在是差的形式,自然应该是$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 x 的商的导数,即辅助函数是 $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$。

证明 设 $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$,且定义 $F(0)=0$,由于

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}f(x)=0,$$

所以函数 $F(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $F(0)=F(1)=0$,于是 $F(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件,则存在 $\xi\in(0,1)$ 满足,使得 $F'(\xi)=0$。由于 $F'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$,因此有

$$F'(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\left(\xi f(\xi)-\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t\right)=0,$$

所以$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

例 4.27 设函数 $f(x)$在$[1,4]$上连续,在$(1,4)$上可导,且 $f(1)+f(2)+f(3)=6$,$f(4)=2$,证明:在$(1,4)$上至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$。

分析 显然,应利用罗尔定理,当然关键的是在区间$[1,4]$上,找到两点函数值相等。

证明 由于函数 $f(x)$在$[1,3]$上连续,于是可以取到最大值 M 和最小值 m,因此有

$$m\leqslant f(1),f(2),f(3)\leqslant M。$$

由于 $f(1)+f(2)+f(3)=6$，所以 $m\leqslant 2\leqslant M$，根据介值定理，存在一点 $\eta\in[0,3]$，使得 $f(\eta)=2$。于是 $f(x)$在$[\eta,4]$上满足罗尔定理的条件，则存在 $\xi\in(\eta,4)\subset(1,4)$，使得

$$f'(\xi)=0。$$

例 4.28 设 $f(x)$在$[1,2]$上二阶可导，且 $f(1)=f(2)=0$，又 $F(x)=(x-1)f(x)$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使 $F''(\xi)=0$。

分析 根据结论的形式，只需验证 $F'(x)$满足罗尔定理条件即可。由于 $F'(x)$可导，所以证明的关键是找到两点，使 $F'(x)$在这两点函数值相等。

证明 已知 $F(x)=(x-1)f(x)$，则 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，所以 $F'(1)=0$。由于 $f(1)=f(2)=0$，于是 $F(1)=F(2)=0$，因此 $F(x)$在$[1,2]$上满足罗尔定理的条件，从而存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $F'(\eta)=0$。所以 $F'(x)$在$[1,\eta]$上满足罗尔定理的条件，从而存在 $\xi\in(1,\eta)\subset(0,2)$，使得 $F''(\xi)=0$。

例 4.29 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上具有二阶导数，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(2)=2\int_1^{3/2}f(x)\mathrm{d}x$，证明：在开区间$(0,2)$内存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$。

分析 只要证明函数 $f'(x)$满足罗尔定理条件，就可以得到 $f''(\xi)=0$。由于 $f'(x)$可导，于是只需找到两点，使 $f'(x)$在这两点函数值相等。

证明 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上满足罗尔定理的条件，于是存在 $\eta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $f'(\eta_1)=0$。根据 $f(2)=2\int_1^{3/2}f(x)\mathrm{d}x$，利用积分中值定理，存在 $\mu\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$使得，$f(2)=f(\mu)$，根据罗尔定理，存在 $\eta_2\in(\mu,2)$，使得 $f'(\eta_2)=0$，从而 $f'(x)$ 在$[\eta_1,\eta_2]$上满足罗尔定理的条件，则在存在一点 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,2)$ 上，使得 $f''(\xi)=0$。

例 4.30 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可导$(0<a<b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}。$$

分析 根据结论的形式，本题应该用微分中值定理证明。若利用罗尔定理，将结论变形，ξ 改为 x，则有

$$f'(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\frac{1}{x}=0,$$

辅助函数为 $F(x)=f(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\ln x$。若利用柯西定理，为了出现结论中的 $\xi f'(\xi)$，可以考虑两个函数 $f(x)$和 $\ln x$。

证明 【方法 1】应用罗尔定理：设

$$F(x)=f(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\ln x,$$

则 $F(a)=F(b)=f(a)\ln b-\ln a f(b)$。由于 $f(x)$在$[a,b]$上可导，所以 $F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$。由于

$$F'(x)=f'(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\frac{1}{x},$$

所以有 $F'(\xi)=f'(\xi)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\frac{1}{\xi}=0$，即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

【方法 2】应用柯西定理：由于 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，所以函数 $f(x)$ 和 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

所以有 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

例 4.31 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，设 $F(x)=f(x)x^3$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一个 ξ 使得 $F'''(\xi)=0$。

分析 证明此题应该用微分中值定理：利用罗尔定理证明，即验证 $F''(x)$ 在某个区间满足罗尔定理的条件。当然关键的是找到两点，使二阶导函数 $F''(x)$ 的函数值相等。

由于涉及较高导数，所以考虑利用泰勒公式证明。事实上，泰勒公式也是证明存在性的有效工具，特别适合有关高阶导数的证明。

证明 【方法 1】应用罗尔定理：由于

$$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x),\quad F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x),$$

显然 $F''(0)=0$，而且 $F'(0)=0$，$F(0)=F(1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，因此 $F'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上满足罗尔定理的条件，存在 $\xi_2\in(0,1)$，使得 $F''(\xi_2)=0$。故 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'''(\xi)=0$。

【方法 2】应用泰勒公式：由于 $F(x)$ 具有三阶导数，于是存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(0)x^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3。$$

由于

$$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x),\quad F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x),$$

所以 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，故 $F(x)=\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3$，因为 $F(1)=f(1)=0$，所以 $0=\frac{1}{3!}F'''(\xi)$，即存在一个 ξ 使得 $F'''(\xi)=0$。

例 4.32 设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。求证：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

分析 此题已知 $f'''(x)$ 连续，证明存在一点使得这点的三阶导数值满足一个等式，所以最终应该对 $f'''(x)$ 应用连续性定理：零点定理或介值定理。

由于已知条件众多，又涉及高阶导数，能够将这些条件有机联系在一起，只有泰勒公式。

证明 由于 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有三阶导数，根据泰勒公式有

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{f'''(\eta_1)}{3!},\quad \eta_1\in[-1,0],$$

及

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{f'''(\eta_2)}{3!},\quad \eta_2\in[0,1],$$

所以有 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$。由于函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，所以函数 $f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值分别为 M,m，故有

$$m \leqslant \frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)] \leqslant M,$$

根据介值定理,在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ,使$f'''(\xi)=3$。

存在一点满足等式的证明方法综述

1. 如果所证等式不含导数和积分,特别已知函数连续,证明存在一点的函数值满足一个等式,一般应用连续性定理:介值定理,零点定理。

2. 如果所证等式含有导数或积分,一般应用微分中值定理:罗尔定理,拉格朗日定理,柯西定理,当涉及高阶导数,特别是三阶导数,一般应用泰勒公式。

3. 微分中值定理中最常用的定理:罗尔定理。利用罗尔定理证明的关键有两方面问题:

(1) 辅助函数$F(x)$的引入。引入辅助函数有两个方法,解方程法和观察法。

(2) 确定辅助函数$F(x)$在那个区间上应用罗尔定理,即找到两点,使其函数值相等。

这可能有两种情形:其一是辅助函数在给定区间$[a,b]$上满足罗尔定理的条件,即辅助函数在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,端点函数值相等;其二辅助函数在给定区间$[a,b]$上不满足罗尔定理的条件,一般是辅助函数在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,但端点函数值不相等,这就需要我们根据已知条件,在区间$[a,b]$上找到两点,使它们的函数值相等。

在寻求辅助函数$F(x)$于两点函数值相等的过程中,往往应用零点定理、罗尔定理、积分中值定理等,如例4.27利用介值定理,例4.28和例4.31利用罗尔定理,例4.29利用积分中值定理。

当验证辅助函数在某个区间上满足罗尔定理的条件后,则得到结论:存在一点ξ,使得$F'(\xi)=0$。最后求$F'(x)$,将ξ代入$F'(x)$并等于零,整理就可以得到我们要证明的结论,如例4.21~例4.26,例4.28和例4.30。

4. 一些题既可以应用罗尔定理,又可以应用拉格朗日定理。事实上,能用拉格朗日定理证明的问题,一般利用罗尔定理也可以证明,所以在证明存在性时不必特别考虑是否应用拉格朗日定理。但是对有些问题,如果仅用一个函数很难导出结论的形式时,需要考虑两个函数,此时应用柯西定理,如例4.30。

5. 证明一点高阶导数(二阶或三阶)等于零或等于某个常数,可以考虑对低一阶导函数应用罗尔定理,如例4.25,例4.28,例4.29和例4.31;也可考虑应用泰勒公式,这样可以充分运用已知条件的各阶导数,如例4.31和例4.32。

题型4 存在两点满足等式的证明

存在两点满足某个等式的证明是存在性证明的一种常见题型,证明的关键是如何创建所要证明的等式。所用的工具分两大类:连续性定理和微分中值定理。

例4.33 设$f(x)$在$[a,b]$$(a>0)$上连续,在$(a,b)$内可导,且$f(a)=f(b)=1$,证明:存在$\xi$和$\eta\in(a,b)$满足$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\frac{\xi}{n}f'(\xi)$,其中$n\geqslant 1$。

分析 整理,将结论中的ξ和η分别放在等式的两端,有

$$n\eta^{n-1}=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)。$$

再考虑哪个函数的导数是nx^{n-1}和$nx^{n-1}f(x)+x^nf'(x)$的形式,显然函数$G(x)=x^n$和函数$F(x)=x^nf(x)$是符合条件的,对这两个函数分别应用拉格朗日中值定理,再联立。

证明 令 $F(x)=x^nf(x)$,$G(x)=x^n$,由于 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续,在 (a,b) 内可导,所以 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件,于是存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi),G(b)-G(a)=(b-a)G'(\eta),$$

即

$$b^n-a^n=(b-a)[\xi^nf'(\xi)+n\xi^{n-1}f(\xi)],\quad b^n-a^n=(b-a)n\eta^{n-1},$$

联立,于是有 $\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$。

例 4.34 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续,在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq0$,证明存在 ξ 和 $\eta\in(a,b)$ 满足 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$。

分析 整理得到 $f'(\xi)=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$,等式的左端只要对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日定理就可以得到;但右端一个函数的导函数不会是这样形式,所以需要考虑两个函数,即对函数 $f(x)$ 和 e^x 应用柯西定理。

证明 对函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日定理,得到

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),\quad \xi\in(a,b)。$$

对函数 $f(x)$ 和 e^x 在 $[a,b]$ 上应用柯西定理,得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta},\quad \eta\in(a,b),$$

上面两式相除,整理得到 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$。

例 4.35 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,证明:存在 ξ 和 $\eta\in(a,b)$,满足 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

分析 将结论整理得到

$$e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi,$$

等式的右端只需对函数 e^x 应用拉格朗日定理就可以得到;等式左端对函数 $e^xf(x)$ 应用拉格朗日定理也可以得到。

证明 对函数 $F(x)=e^xf(x)$ 和 $G(x)=e^x$ 在 $[a,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理,得到

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\eta),\quad G(b)-G(a)=(b-a)G'(\xi),\quad \xi,\eta\in(a,b),$$

即

$$e^bf(b)-e^af(a)=(b-a)e^\eta[f'(\eta)+f(\eta)],\quad e^b-e^a=(b-a)e^\xi。$$

于是有

$$e^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]=e^\xi,\quad 即\quad e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1。$$

例 4.36 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)\neq f(b)$,求证:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

分析 整理得到 $f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$,等式的左端 $f'(\xi)$ 只要对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日定理就可以得到;等式右端 $\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$ 对两个函数 $f(x)$ 和 x^2 应用柯西定理就可以得到。

证明 对函数 $f(x)$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理有

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),\quad \xi\in(a,b);$$

对 $f(x)$和 x^2 在$[a,b]$上应用柯西中值定理,有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b)。$$

将上面两式相除(联立),整理得到 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

例 4.37 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$。证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在不同两点 $\zeta,\eta\in(0,1)$,使得 $f'(\zeta)f'(\eta)=1$。

分析 证明的第一问,由于已知 $f(x)$在$[0,1]$连续,证明存在一点的函数值满足某个等式,所以应该用连续性定理。证明的第二问,是存在两个点的同一个函数的函数值满足一个等式,所以应该对这个函数在不同区间上应用拉格朗日定理。

证明 (1) 设 $F(x)=f(x)-1+x$,由于 $F(0)=-1,F(1)=1$,则 $F(x)$在$[0,1]$上满足零点定理条件,于是$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=1-\xi$。

(2) 根据结论(1),对上述的 $\xi\in(0,1)$,$f(x)$在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$都满足拉格朗日定理的条件,有

$$f(\xi)-f(0)=\xi f'(\zeta),\quad \zeta\in(0,\xi)\Rightarrow 1-\xi=\xi f'(\zeta),\quad \zeta\in(0,\xi);$$

和

$$f(1)-f(\xi)=(1-\xi)f'(\eta),\quad \eta\in(\xi,1)\Rightarrow \xi=(1-\xi)f'(\eta),\quad \eta\in(\xi,1)。$$

于是有 $f'(\zeta)f'(\eta)=1$。

注 一般情况下,证明题的两问是相互关联的,在证明第二问题时,往往把第一问得到的结果作为已知条件或结论,解决第二个问题。所以遇到这类题型,不要孤立地处理第二个问题。

存在两点满足等式的证明方法综述

存在两点满足某个等式的证明的关键是如何创建所要证明的等式。一般的有三种创建存在两点满足某个等式的方法:

(1) 对一个函数应用拉格朗日定理,出现 ξ,对另一个函数应用拉格朗日定理出现 η,联立,建立存在两个点的函数值的等式,如例 4.33 和例 4.35。

(2) 对一个函数应用拉格朗日定理出现 ξ,对另两个函数应用柯西定理出现 η,联立,建立存在两个点的函数值的等式,如例 4.34 和例 4.36。

(3) 如果结论仅有一个函数,如例 4.37,一般是将一个区间分成两个区间,在一个区间上应用拉格朗日定理出现 ξ,在另一个区间再应用拉格朗日定理出现 η,联立,建立存在两个点的函数值的等式,如例 4.37。当然这里的关键是用哪个点将该区间分成两个区间,一般情况下,分点应是具有特殊性质的点。

练习题 4-1

1. 试证方程 $x=a\sin x+b$,其中 $a,b>0$,至少有一个正根并且不超过 $a+b$。
2. 试证方程 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x=5$ 恰有两个实根。

3. 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(x)<1$，证明：方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在(0,1)内有且只有一个实根。

4. 求证方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$。

5. 设 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围。

6. 试求方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数。

7. 设 $0<a<b$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$bf(b)-af(a)=[\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)]\ln\frac{b}{a}。$$

8. 设 $f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+\frac{\xi}{1+\xi}f'(\xi)=0。$$

9. 设 $f(x)$ 在[0,1]上可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1) $\exists\xi\in(0,1)$，使得$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=-\xi f(\xi)$；

(2) 在(0,1)内存在 η，使得 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

10. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意的常数 k，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+kf(\xi)=0$。

11. 证明下列不等式：

(1) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$；　　(2) 当 $0<x<y<\frac{\pi}{2}$时，有$\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}$；

(3) 当 $0<x$ 时，有 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$；　　(4) 当 $0<x$ 时，$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$；

(5) 当 $p>1$，$0<x<1$ 时，$\frac{1}{2^{p-1}}<x^p+(1-x)^p\leqslant 1$；

(6) 当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，$a^b>b^a$；　　(7) $x\arctan x\geqslant\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$；

(8) 当 $0<x$ 时，有$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$；

(9) 当 $0<x<2$ 时，证明：$4x\ln x\geqslant x^2+2x-3$；

(10) 当 $0<a<b$ 时，证明：$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$。

12. 若 $f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，则$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]。$$

13. 若 $f(x)$在(0,1)内取最大值，且对任意的 $x\in(0,1)$有$|f''(x)|\leqslant 1$，试证：

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant 1。$$

14. 若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，则至少$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

15. 若 $f(x)$ 在[0,1]上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，则 $\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=2\xi f(\xi)。$$

16. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

17. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，试证：

(1) $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；　　(2) $\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)-f(\eta)=0$。

18. 设函数 $f(x)$在$[0,2]$上二阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=2$，$f(2)=0$，试证：$\exists\xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=-4$。

19. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，则对任意的 $a,b>0$，都存在 ξ，$\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$ 使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

20. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f(a)=0$，$f(b)=1$，求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，$\xi\neq\eta$ 使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$。

21. 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，$f(0)=0$，$f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=-1$，求证：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x)\geqslant 8。$$

22. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\leqslant 2$，求证：$|f'(x)|\leqslant 1$。

23. 证明下列数值不等式：

(1) 对任意的实数 $a,b>0$，对于 $n\geqslant 2$，则有$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{a+b}$；

(2) 对任意的实数 $x,y>0$，$0<\alpha<\beta$，试证：$(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}>(x^{\beta}+y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$。

4.2 定积分等式与不等式的证明

一、基本结论

定理 3(积分不等式) 函数 $f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，则

(1) **保序性** 若 $f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

(2) **保号性** 若 $f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$；若 $f(x)\leqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$；

(3) **绝对值不等式** $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$；

(4) **柯西不等式** $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$。

定理 4(积分估计定理) 若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$。

定理 5(积分中值定理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)。$$

二、基本方法

题型 5　定积分等式的证明

定积分等式的证明，实际是计算性的证明，其证明思路或解题方法可以根据定积分的被积函数、积分区间来确定，这是因为积分值是由被积函数和积分区间决定的。

方法 1　换元积分

例 4.38　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，试证明：

(1) $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(a+b-\xi)+f(\xi)=0$。

证明　(1) 显然，被积函数化为 $f(a+b-x)$，需要变换 $x=a+b-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=0。$$

(2)【分析】(2) 是存在性证明，尽管没有涉及导数，但应用零点定理是没办法得到结论 (2) 的。由于已知是积分，结论是函数，恰好是导数和原函数关系，所以应该应用微分中值定理。为了找到辅助函数，将 ξ 改为 x，有 $f(a+b-x)+f(x)$，显然原函数应是上限积分函数 $F(x)=\int_a^x[f(a+b-t)+f(t)]\mathrm{d}t$。

令 $F(x)=\int_a^x[f(a+b-t)+f(t)]\mathrm{d}t$，则 $F(a)=0$，且

$$F(b)=\int_a^b[f(a+b-t)+f(t)]\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t+\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0。$$

由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续，所以 $F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，因此存在 $\xi\in(a,b)$使 $F'(\xi)=0$。由于

$$F'(x)=\left(\int_a^x[f(a+b-t)+f(t)]\mathrm{d}t\right)'=f(a+b-x)+f(x),$$

所以 $F'(\xi)=f(a+b-\xi)+f(\xi)=0$。

方法 2　分部积分

例 4.39　设 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x。$$

证明　由于

$$\begin{aligned}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x&=(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b(2x-a-b)f'(x)\mathrm{d}x\\&=(2x-a-b)f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$。

例 4.40　设 $f'(x)$ 是连续函数，$F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$，证明

$$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)。$$

证明 由于

$$F(2a)-2F(a)=\int_0^{2a}f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^{2a}f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t。$$

而

$$\int_a^{2a}f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t=f^2(a)-f(0)f(2a)+\int_a^{2a}f'(t)f(2a-t)\mathrm{d}t;$$
$$\int_a^{2a}f'(t)f(2a-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t,$$

所以 $F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$。

定积分等式的证明方法综述

定积分等式的证明,是一个计算性的证明,通常应用两种方法,换元积分和分部积分。

(1) 若定积分等式的被积函数仅是 $f(x)$,一般是应用换元积分,若等式的左右两端只是积分区间发生变化,在换元时,主要考虑变化积分区间;若等式两端是被积函数变化,而积分区间不变,在换元时,主要考虑变化被积函数。

(2) 若定积分等式的被积函数不仅是 $f(x)$,而且还含有 $f'(x)$,$f''(x)$等,一般是应用分部积分。

题型 6 定积分存在性的证明

例 4.41 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x。$$

分析 尽管结论没有涉及导数,但是用连续性定理是没有办法得到结论的形式的,况且结论中有 $f(x)$ 和$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,它们仍然是导数和原函数关系。所以应该考虑利用微分中值定理:罗尔定理。为了引入辅助函数,将结论中的ξ改为x(为了避免积分变量 x 和ξ区别,将积分变量改写为 t),得到

$$f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0,\quad 或\quad f(x)\int_b^x g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

通过观察,函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$ 的导数是上述结论的形式。

证明 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$,则 $F(a)=F(b)=0$,于是 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件,故存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$。由于

$$F'(x)=f(x)\int_b^x g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

于是

$$F'(\xi)=f(\xi)\int_b^\xi g(t)\mathrm{d}t+g(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0,$$

所以有 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$。

例 4.42 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,证明:$\exists\,\xi\in(0,1)$,使得

$$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = 0。$$

分析 和例 4.41 类似，只能用微分中值定理：罗尔定理。但问题是函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的原函数是什么？为了出现$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，所以考虑两个函数的积，即 $x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的导数才能出现$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，但是

$$\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)$$

又多出 $xf(x)$，为了去掉这部分，只需减去$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 的导数。于是可知，函数

$$\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t\right)' = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t。$$

证明 令 $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(0)=0$，根据$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，有

$$F(1) = \int_0^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 0。$$

所以函数 $F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件，则$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$。由于

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

于是有$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

定积分存在性的证明方法综述

(1) 定积分存在性的命题，尽管没有涉及导数，但所用的结论还是微分中值定理，更多情况下是罗尔定理。这是因为已知条件函数和结论中的积分仍是原函数和导函数的关系。

(2) 应用罗尔定理一定要引入辅助函数，辅助函数的引入大都考虑变限积分函数或变限积分函数与某个函数的积或商。

(3) 确定辅助函数同样可用观察法和解方程法。

题型 7 定积分不等式的证明

常用定理 比较定理、估计定理、微积分中值定理。

常用不等式 绝对值不等式 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$；

柯西不等式 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$。

方法 1 变限积分函数法(定积分不等式转化为函数不等式)

对一些定积分不等式，可以理解为关于积分上限 a 和下限 b 的二元不等式，如果函数在区间端点 a 和 b 没有特定的性质要求，即对任意的端点 a 或 b 不等式都是成立的，于是可以将不等式中的端点 a 或 b 视为变量，改为 x，结论仍是成立的，此时不等式转化为函数不等式，不等式的定积分化为变限积分函数。

例 4.43 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，试证：$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。

分析 根据题设和结论，对任意的上限 b，只要 $f(x)$在$[a,b]$连续，上述结论都是正确

的。所以可考虑将结论中的 b 改为 x，从而引入变限积分函数，实质是将二元不等式转化为函数不等式。

证明 令 $F(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}F'(x)&=2f(x)\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-(x-a)f^2(x)\\&=\int_a^x 2f(t)f(x)\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(x)\mathrm{d}t\\&=-\int_a^x[f(x)-f(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant 0。\end{aligned}$$

所以 $F(x)$是递减的。又因为 $F(a)=0$，因此 $F(b)\leqslant F(a)=0$，即

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x。$$

注 (1) 当上限或下限改为变量 x 时，积分变量应更换为 t 或其他字母，以避免积分限和积分变量重复。

(2) 此题也可将下限 a 改为变量 x。

(3) 此题可以应用柯西不等式证明。

例 4.44 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且单调增的，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x。$$

分析 同例 4.43 类似，对任意的 b，上述不等式都是正确的。所以可将结论中的 b 改为 x，从而引入变限积分函数，将二元不等式转化为函数不等式。

证明 令 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a+x)f(x)-2xf(x)\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a-x)f(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(x)\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t<0。\end{aligned}$$

(因为 $t<x$，且 $f(x)$单调增加，即 $f(t)<f(x)$)所以 $F(x)$单调递减。又因为 $F(a)=0$，所以 $F(b)<F(a)=0$，即

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x。$$

例 4.45 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有连续的一阶导数，在$(0,1)$内二阶可导且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，证明：$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x>\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

分析 根据题设和结论，不等式在积分区间$[0,1]$上成立，但是对区间的右端点 1，并没有特别要求，于是可知不等式中的 1，改为任意的 x 结论都是成立的。但新的问题产生：这个 1 是否出现在其他地方，如$\frac{2}{3}\times 1\times\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，这不得而知，这只能通过辅助函数引入后，在证明单调性时去考量！这里是不能将积分下限 0 改为变量 x 的，这是因为 $f(0)=0$ 具有特殊性。

证明　令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{3}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{3}xf(x)=\frac{1}{3}xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F''(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{2}{3}f(x)=\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{1}{3}f(x),$$

$$F'''(x)=\frac{1}{3}xf''(x)>0。$$

由于 $F'''(x)>0\Rightarrow F''(x)$在$[0,1]$上单调递增$\Rightarrow F''(x)>F''(0)=0\Rightarrow F'(x)$在$[0,1]$上单调递增$\Rightarrow F'(x)>F'(0)=0\Rightarrow F(x)$在$[0,1]$上单调递增$\Rightarrow F(x)>F(0)=0$，特别地 $F(1)>0$，即

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x>\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

方法 2　端点函数值为 0 的“L-N”方法

在定积分不等式的命题中，常常伴有已知条件：积分区间的端点的函数值为 0。为了更好地、充分地利用已知条件，一般应用拉格朗日定理，或牛顿-莱布尼茨公式。

基本原理：拉格朗日定理：$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\xi\in(a,x)$，简称“**L**”。

牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$，简称“**N**”。

于是，当用到两个定理证明时，我们称为“**L-N”方法**。若端点函数值 $f(a)=0$ 时，则有

$$f(x)=(x-a)f'(\xi),\xi\in(a,x)\quad 和\quad \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)。$$

“**L-N”方法**的特点是充分运用端点函数值为 0 的性质，将函数、导数和积分有机的联系在一起。

例 4.46　设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)\leqslant M,f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2。$$

证明　对任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，根据 $f'(x)\leqslant M$ 得到 $f(x)\leqslant M(x-a)$，所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2。$$

例 4.47　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上不恒为 0，且 $f'(x)$ 连续，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在一个 $\xi\in[a,b]$ 使 $|f'(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

证明　因为 $f(x)$在$[a,b]$上不恒为 0，且 $f'(x)$连续，所以存在 $\xi\in[a,b]$有

$$|f'(\xi)|=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|=M>0。$$

根据拉格朗日定理

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a),\quad f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b),$$

于是

$$|f(x)|\leqslant M(x-a),\quad |f(x)|\leqslant M(b-x),$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{b+a}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{b+a}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{\frac{b+a}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{b+a}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\left[\int_a^{\frac{b+a}{2}}(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{b+a}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x\right]\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M。$$

从而存在 $\xi\in[a,b]$，有 $|f'(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

方法 3 特定值转化法

所谓特定值转化法就是将不等式的某部分利用拉格朗日定理、积分中值定理转化为特定一点的函数值，然后利用牛顿-莱布尼茨公式，经放大或缩小，获得所要证明的不等式。

例 4.48 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明：对于 $x\in[0,1]$，有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t。$$

分析 不等式 $|f(x)|\leqslant\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t$ 可表示为

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t \quad 或 \quad |f(x)|-\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

利用积分中值定理 $\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=|f(\eta)|,\eta\in(0,1)$，于是只需证明

$$|f(x)|-|f(\eta)|\leqslant\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t。$$

这和牛顿-莱布尼茨公式的形式基本一致。

证明 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，于是存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=|f(\eta)|$。因为 $f(x)-f(\eta)=\int_x^\eta f'(t)\mathrm{d}t$，于是

$$|f(x)|-|f(\eta)|\leqslant|f(x)-f(\eta)|=\left|\int_x^\eta f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

因此

$$|f(x)|\leqslant|f(\eta)|+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t。$$

例 4.49 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则对于 $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right),x_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 有

$$|f'(x)|\leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x。$$

分析 不等式 $|f'(x)|\leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$ 可表示为

$$|f'(x)|-3|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x,$$

根据拉格朗日定理，有

$$3|f(x_2)-f(x_1)|=3|x_2-x_1||f'(\eta)|\geqslant|f'(\eta)|,\quad \eta\in(0,1)。$$

于是问题转化为只需证明

$$|f'(x)|-|f'(\eta)|\leqslant\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$

这和牛顿-莱布尼茨公式的形式基本一致。

证明 由于 $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right),x_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，则 $3|x_2-x_1|>1$。又由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$$3|f(x_2)-f(x_1)|=3|x_2-x_1||f'(\eta)|\geqslant|f'(\eta)|。$$

由于 $f'(x)-f'(\eta)=\int_x^{\eta}f''(t)\mathrm{d}t$，所以

$$|f'(x)|-|f'(\eta)|\leqslant|f'(x)-f'(\eta)|=\left|\int_x^{\eta}f''(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f''(t)|\mathrm{d}t,$$

因此

$$|f'(x)|\leqslant|f'(\eta)|+\int_0^1|f''(t)|\mathrm{d}t\leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x。$$

定积分不等式证明方法综述

定积分不等式的证明比普通不等式的证明难得多，普通不等式有诸多规律性的方法可循，而定积分不等式却完全不同，其结论在形成过程中，略去了许多中间环节，或经过放缩得到结论。

(1) 如果是与区间端点无关的命题，也就是不论端点取是什么值，结论都是成立的，此题可用变限积分函数法。将定积分不等式改为函数不等式，然后利用前面总结的方法，证明这个函数不等式。

(2) 如果对区间的端点有特别的限制，如端点函数值为 0 等，此时考虑“L-N”方法。

(3) 如果所证不等式是比较复杂的形式，利用特定值转化法，考虑把部分量转化为函数在某点的函数值，从而将不等式转化为与微积分中值定理或牛顿-莱布尼茨公式一致的形式，利用积分性质，放缩不等式，最后得到所要证明的结论。

(4) 定积分不等式的证明的关键是结论可能通过什么渠道形成，确定整体解题思路，或者考虑如何充分运用已知条件，特别是比较难应用的已知条件，如果能有效地应用这些已知条件，问题基本得到解决。

练习题 4-2

1. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且是单调减少的，证明：对任意的 $\alpha\in(0,1)$有

$$\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

2. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续，且单调减少，$f(x)>0$，证明：对满足 $0<\alpha<\beta<1$ 的任何 α,β，有 $\beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x$。

3. 设 $f'(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

4. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明：$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$。

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f''(x)>0$，证明：$\frac{f(b)+f(a)}{2}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

6. 设 $f(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，且 $f(a)=0$，求证：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x。$$

7. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续，证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得$\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$。又若 $f(x)>$

0,且单调减少,则这样的 ξ 是唯一的。

8. 设 $f(x)$ 是连续函数,证明:$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$。

9. 设 $f(x)$ 有连续导数,且 $f(0)=0$,$0<f'(x)<1$,证明:$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2<\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$。

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上具有连续的导数,证明:

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

11. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数,$f(0)=0$,$f(1)=0$,求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x。$$

13. 若函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上具有连续导数,且 $f(2)=f(4)=0$,试证:

$$\left|\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{2\leqslant x\leqslant4}|f'(x)|。$$

14. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数,且 $f(a)=f(b)=0$,试证:

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

15. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,则 $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$。

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$,试证:

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $F(x)$ 也是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是单调不增,则 $F(x)$ 单调不减。

17. 求证:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

4.3 连续性定理与微分中值定理考研真题

一、连续性定理与微分中值定理考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里,关于连续性定理与微分中值定理的考研数一真题共出 9 道题,其题型分布在:

1. 关于存在性的证明:共有 4 个题,分布在 2005 年,2007 年,2009 年和 2013 年。

2. 关于不等式的证明:共有 2 个题,分布在 2004 年和 2012 年。

3. 关于方程根或函数零点的讨论:共有 3 个题,分布在 2008 年,2011 年和 2017 年。

1 连续性定理与微分中值定理考研数一真题题型分析

1. 存在性的证明:2005 年考了利用零点定理证明存在一点满足某个等式,以及利用拉格朗日定理证明存在两点满足某个等式;2007 年考了证明存在一点二阶导数等于零;2009

年考了证明拉格朗日定理；2013年考了应用罗尔定理，证明存在一点满足某个等式；第二问也应用罗尔定理，证明存在一点满足某个等式，只是辅助函数的引入更困难些，寻找两点函数值相等也有一定难度。

2. 不等式的证明：2004年考了证明数值不等式，可应用拉格朗日定理证明，也可转化为(看作)函数不等式，利用单调性证明；2012年考了证明函数不等式，可以利用单调性证明。

3. 方程根(零点)的讨论：2008年考了求函数的零点个数；2011年考了讨论含有参数的方程根的个数；2017年考了利用零点定理证明方程在(0,1)内至少存在一个根，再利用罗尔定理证明另一个方程在(0,1)内至少存在两个根。

2 连续性定理与微分中值定理考研数一真题

1. (2004，三(15)(12分))设 $e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$。

考点与解法：证明不等式。可以利用拉格朗日定理，也可以转化为函数不等式，利用单调性证明。

2. (2005，三(18)(4分))已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：(i)存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$；(ii)存在两个不同点 $\zeta,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)f'(\eta)=1$。

考点与解法：存在性的证明。(i)可用零点定理证明；(ii)用 ξ 将 $[0,1]$ 分成两个区间，应用拉格朗日定理，联立。

3. (2007，三(19)(11分))设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

考点与解法：存在性的证明。证明 $F(x)=f'(x)-g'(x)$ 在某区间满足罗尔定理的条件，所以需要寻找两点函数值相等；或找到函数 $f(x)-g(x)$ 三点函数值相等，即可。

4. (2008，一(1)(4分)) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 零点的个数为

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

考点与解法：求函数零点的个数。求导函数，令其等于0，求解。

5. (2009，三(18)(11分))

(i) 证明拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

(ii) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

考点与解法：存在性的证明和计算单侧导数。(i)利用罗尔定理证明拉格朗日中值定理；(ii)用定义计算 $f'_+(0)$。

6. (2011，三(17)(10分))求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根个数，其中 k 为参数。

考点与解法：求方程根的个数。求函数的单调区间，根据 k 的取值范围，确定每个单调区间零点的个数。

7. (2012，三(15)(10分))证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$。

考点与解法：证明函数不等式。利用单调性证明不等式。

8.（2013，三(18)(10分)）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：(i)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；(ii)存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

考点与解法：证明存在性。两问都是引入辅助函数，利用罗尔定理证明。

9.（2017，三(18)(10分)）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：(i)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；(ii)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根；

考点与解法：证明方程根的存在性。(i)利用零点定理证明；(ii)引入辅助函数 $F(x)=f(x)f'(x)$，证明存在三个点，函数值都等于0。

二、连续性定理与微分中值定理考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于连续性定理和微分中值定理的考研数三真题共出15道题，大致每年一题，题型分布在：

1. 关于存在性的证明：共有5个题，分布在2003年，2007年，2009年，2010年和2013年。

2. 关于不等式的证明：共有5个题，分布在2004年，2005年，2006年，2012年和2014年。

3. 关于等式的证明：有1个题，分布在2008年。

4. 关于方程根或函数零点的讨论：共有4个题，分布在2004年，2011年，2017年和2019年。

1 连续性定理与微分中值定理考研数三真题题型分析

1. 关于存在性的证明：2003年考了利用罗尔定理证明一点导数等于0；2007年考了利用零点定理证明存在零点；找到三点函数值相等，利用罗尔定理，证明存在一点二阶导数等于0；2010年第一问考了介值定理，积分中值定理，第二问考了找到三点函数值相等，用罗尔定理证明存在一点二阶导数等于0；2013年第一问考了利用介值定理，证明存在一点的函数值满足某个等式；第二问考了利用罗尔定理证明存在一点的导数值满足某个等式。

2. 关于不等式的证明：2004年考了证明积分不等式，引入辅助函数，应用分部积分；2005年考了证明积分不等式，利用变限积分函数法证明；2006年考了证明数值不等式，利用单调性证明；2012年考了证明函数不等式，可用单调性证明；2014年考了证明含变限积分函数积分不等式，可利用变限积分函数法证明。

3. 关于等式的证明：2008年考了定积分等式的证明。

4. 关于方程根或函数零点的讨论：2004年考了确定未知参数，使函数有两个不同零点，2011年考了证明方程恰有两个实根；2017年和2019年分别考了确定未知参数取值范围，使方程存在一个实根和三个实根。

2 连续性定理与微分中值定理考研数三真题

1.（2003，八(8分)）设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(3)=1$，

$f(0)+f(1)+f(2)=3$，试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

考点与解法： 存在性的证明。找到两点函数值相等，利用罗尔定理。

2.（2004，二(7)(4 分)）当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同零点。

(A) 2；　　　　(B) 4；　　　　(C) 6；　　　　(D) 8。

考点与解法： 确定未知常数。求单调区间，确保有两个不同零点满足的条件，求出 a 的取值。

3.（2004，三(17)(8 分)）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$。

考点与解法： 证明定积分不等式。利用分部积分，原函数为积分上限函数。

4.（2005，三(19)(8 分)）设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$。证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1)$。

考点与解法： 证明定积分不等式。引入变限积分函数，利用单调性，证明函数不等式。

5.（2006，三(17)(10 分)）证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b > a\sin a+2\cos a+\pi a。$$

考点与解法： 证明数值不等式。利用单调性，证明函数不等式。

6.（2007，三(19)(11 分)）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值。又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：

(i) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；(ii) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

考点与解法： 存在性的证明。(i)用零点定理；(ii)引入辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，找到三点函数值相等，利用罗尔定理，存在一点二阶导数等于零。

注　此题为上小节 3.（2007，三(19)(11 分)）题的细化。

7.（2008，三(18)(10 分)）设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数，证明：

(i) 对任意的实数 t，有 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

(ii) $G(x)=\int_0^x \left[2f(t)-\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数。

考点与解法： 定积分等式的证明。(i)和(ii)都是换元积分。

8.（2009，三(18)(11 分)）题目同上小节 5.（2009，三(18)(11 分)）题。

9.（2010，三(19)(10 分)）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$。证明：

(i) 存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；　　　(ii) 存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$。

考点与解法： 存在性的证明。(i)用积分中值定理；(ii)找到 $f(x)$ 在三点函数值相等，利用罗尔定理。

10.（2011，三(18)(10 分)）证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根。

考点与解法： 证明方程存在二根。求函数的单调区间，确定每个单调区间零点的个数。

11.（2012，三(18)(10分)）题目同上小节7.（2012，三(15)(10分)）题。

12.（2013，三(19)(10分)）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可导，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$。证明：(i)存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；(ii)对(i)中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$。

考点与解法：存在性的证明。(i)利用零点定理或介值定理；(ii)利用罗尔定理或拉格朗日定理。

13.（2014，三(19)(10分)）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且函数 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$。证明：

(i) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$；　　(ii) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

考点与解法：证明定积分不等式。(i)利用定积分的保序性；(ii)将 b 改为 x，引入变限积分函数法，证明函数不等式。

14.（2017，三(18)(10分)）已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围。

考点与解法：确定常数范围。可以证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-k$ 是单调的，求出最小值和最大值，使最小值小于0，最大值大于0。

15.（2019，一(2)(4分)）已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同在实根，确定常数 k 的取值范围。

(A) $(-\infty,-4)$；　(B) $(4,+\infty)$；　(C) $[-4,4]$；　(D) $(-4,4)$。

考点与解法：确定常数范围。求导函数 $f'(x)$，令其等于0，求出驻点，得到单调区间，于是确定方程有三个不同实根满足的条件，求出常数取值范围。

4.4　本章练习题答案与提示

练习题 4-1 答案与提示

1. 提示：只需证明函数在 $(0,a+b]$ 上至少有一个根。$F(0)=-b<0$，$F(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$，根据零点定理，在 $(0,a+b]$ 内至少存在一根。

2. 提示：函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x-5$ 是偶函数，关于 y 轴对称，只需证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 内有唯一零点。由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x-5)=-1<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，根据零点定理，至少存在一个零点。由于 $f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x\geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，由于 $f'(0)=0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，所以 $f(x)$ 有唯一零点。

3. 提示：令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$，则 $F'(x)=2-f(x)>0$，于是 $F(x)$ 单调增加。$F(0)=-1<0$，$F(1)=1-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t>0$，根据零点定理，$F(x)$ 存在零点。所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点。

4. 提示：令 $f(x)=x+p+q\cos x$，显然 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调增加。又由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，根据零点定理，函数 $f(x)$ 存在零点。所以函数 $f(x)$ 有唯一零点。

5. $k\leqslant 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$。提示：令 $F(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，(1)当 $k\leqslant 0$ 时，$F'(x)=k-\frac{2}{x^3}<0$，所以 $F(x)$ 单调减少；因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有零点，且是唯一零点。(2)$k>0$，令 $F'(x)=k-\frac{2}{x^3}=0$，解得 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，且 $F''(x)\geqslant 0$，所以 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 是最小值点，仅当 $F(x_0)=kx_0+\frac{1}{x_0^2}-1=0$，即 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，函数 $F(x)$ 只有唯一零点。

6. 2个。提示：$F(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx$，$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$。令 $F'(x)=0$，解得 $x=e$，显然 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 是单调的，由于 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx>0$，所以 $F(e)>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，所以 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 上，各有唯一零点。

7. 提示：对两个函数 $xf(x)$ 和 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理。

8. 提示：将结论中的 ξ 改写为 x，有 $f(x)+\frac{x}{1+x}f'(x)=0$，整理方程 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1+x}{x}$，积分得到 $\ln f(x)=-\ln x-x+C$，即 $xf(x)e^x=e^C$，引入辅助函数 $F(x)=xe^x f(x)$，验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件。

9. 提示：用观察法确定辅助函数 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，应用罗尔定理，得到结论(1)；且 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上也满足罗尔定理的条件，对 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理，得到结论(2)。

10. 提示：将结论中的 ξ 改写为 x，于是有 $f'(x)+kf(x)=0$，解方程 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-k$，得到 $\ln f(x)=-kx+C$，于是有 $e^{kx}f(x)=e^C$，所以辅助函数为 $F(x)=f(x)e^{kx}$，再验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，应用罗尔定理就可以得到结论。

11. 证明不等式：

(1) 提示：变形。只需证明 $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$。令 $F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$，用单调性证明 $F(x)>0$。

(2) 提示：变形，只需证明 $\frac{\sin y}{y}<\frac{\sin x}{x}$，引入辅助函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，就可以得到结论。

(3) 提示：利用单调性，证明两个不等式(1)$x-\frac{x^3}{6}<\sin x$；(2)$\sin x<x$，$x>0$。

(4) 提示：利用单调性，证明两个不等式(1)$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)$；(2)$\ln(1+x)<x$。

(5) 提示：令 $f(x)=x^p\ (p>1)$，显然 $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}\geqslant 0$，凹函数，于是有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(1-x)\right]<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1-x)$，即 $\frac{1}{2^{p-1}}<x^p+(1-x)^p$。

(6) 提示：将问题转化为 $b\ln a>a\ln b$，即 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$。令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，验证 $f(x)$ 在 $x>e$ 上单调递减。

(7) 提示：利用最值法证明。令 $F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，则 $F'(x)=\arctan x$，显然 $F(x)$ 不是单调函数。令 $F'(x)=0$，得到唯一驻点 $x=0$，$F''(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$，所以 $x=0$ 是最小值点，最小值 $F(0)=0$，所以 $F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\geqslant 0$。

(8) 提示：利用单调性，证明两个不等式(1)$\ln x\geqslant\frac{x-1}{x+1}$，$x\geqslant 1$；(2)$\ln x\leqslant\frac{x-1}{x+1}$，$0<x<1$。

(9) 提示：求最值。令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，则 $f'(x)=4\ln x+4-2x-2$，且 $f''(x)=\frac{4-2x}{x}>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，由于 $f'(1)=0$，所以在 $(0,1)$ 上，$f'(x)<0$，在 $(1,2)$ 内，$f'(x)>0$，所以 $f(1)=0$ 是函数 $f(x)$ 的最小值。

(10) 提示：对函数 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日定理，得到 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}$，其中 $a<\xi<b$，只需证明 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$。

12. 提示：用观察法确定辅助函数 $F(x)=f(x)-x^2[f(1)-f(0)]$，验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，应用罗尔定理就可得到结论。本题还可用对函数 $f(x)$ 和 x^2 在区间 $[0,1]$ 上应用柯西定理的方法证明。

13. 提示：由于 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取最大值，不妨设 ξ 是函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的最大值点，根据费马定理，有 $f'(\xi)=0$，对函数 $f'(x)$ 分别在 $[0,\xi]$ 上和 $[\xi,1]$ 上应用拉格朗日定理；$f'(\xi)-f'(0)=\xi f''(\theta)$，$0<\theta<\xi$；$f'(1)-f'(\xi)=(1-\xi)f''(\eta)$，$\xi<\eta<1$。于是，根据 $|f''(x)|\leqslant 1$，有 $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant 1$。

14. 提示：将结论中的 ξ 改写为 x，于是有 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$，解方程 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x)$，得到 $\ln f(x)=-g(x)+C$，即 $e^{g(x)}f(x)=e^C$，所以辅助函数为 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，应用罗尔定理就可得到结论。

15. 提示：将结论中的 ξ 改写为 x，于是有 $f'(x)=2xf(x)$，解方程 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2x$，得到 $\ln f(x)=x^2+C$，即 $e^{-x^2}f(x)=e^C$，为了更好利用已知条件，辅助函数设为 $F(x)=e^{1-x^2}f(x)$，根据已知条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$，利用积分中值定理，有 $f(1)=e^{1-\eta^2}f(\eta)$，即 $F(1)=F(\eta)$，再对 $F(x)$ 在区间 $[\eta,1]$ 上应用罗尔定理。

16. 提示：根据积分中值定理，$\exists\,\eta\in(0,\pi)$，使得 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx=f(\eta)\sin\eta=0$，即 $f(\eta)=0$。若 η 是 $f(x)$ 唯一零点，则在 $(0,\eta)$ 内和 (η,π) 内，$f(x)$ 一个恒正，另一个恒负，从而有 $f(x)\sin(x-\eta)$ 恒正或恒负，所以 $\int_0^{\pi}f(x)\sin(x-\eta)dx\neq 0$，也就是 $\cos\eta\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx-\sin\eta\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx\neq 0$ 这与 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=0$ 矛盾。于是还存在另外一个零点，应用罗尔定理就可得到结论。

17. 提示：(1) 利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，可以找到一点函数值大于零，利用 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$，可以找到一点函数值小于零，于是 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$。

(2) 引入辅助函数 $F(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，只需找到两点，使得 $f'(x)-f(x)=0$。令 $g(x)=e^{-x}f(x)$，根据已知条件和结论(1)有：$f(0)=f(\xi)=f(1)=0$，利用罗尔定理，$\exists\,\theta\in(0,\xi)$ 和 $\exists\,\eta\in(\xi,1)$，使得 $g(\theta)=g(\eta)=0$，即 $f'(\theta)-f(\theta)=0$，$f'(\eta)-f(\eta)=0$。于是 $F(x)$ 在 $[\theta,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，应用罗尔定理即得到结论。

18. 提示：【方法 1】过点 $(0,0)$，$(1,2)$，$(2,0)$ 作抛物线 $y=ax^2+bx+c$，得到 $y=-2x^2+4x$，引入辅助函数 $F(x)=f(x)-y=f(x)+2x^2-4x$，显然，函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上和 $[1,2]$ 上满足罗尔定理的条件，存在两点 $\mu\in(0,1)$，$\eta\in(1,2)$ 使得 $F'(\mu)=F'(\eta)=0$，再对函数 $F'(x)$ 在区间 $[\mu,\eta]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\mu,\eta)$，使得 $F''(\xi)=0$。而 $F''(x)=f''(x)+4$，于是结论成立。

【方法 2】利用泰勒公式 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2$，将 $x=0$ 和 $x=2$ 分别代入公式中，得到 $f(0)=f(1)-f'(1)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)$，即 $\frac{1}{2}f''(\xi_1)=-2+f'(1)$，$f(2)=f(1)+f'(1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)$，即

$\frac{1}{2}f''(\xi_2)=2+f'(1)$，于是 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=-8$。根据介值定理得到结论。

19. 提示：将结论变形$\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1$，于是需要找到一点 τ，对函数 $f(x)$ 分别在区间$[0,\tau]$上和$[\tau,1]$上应用拉格朗日定理：$f(\tau)-f(0)=\tau f'(\xi)$，$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta)$，于是有$\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\tau$，$\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=1-\tau$，从而有$\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}+\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=1$，于是我们发现 τ，应满足$f(\tau)=\frac{a}{a+b}$。根据介值定理，这样的点是存在的。

20. 提示：由于 $f(a)=0$，$f(b)=1$，根据介值定理，$\exists\tau\in(0,1)$，使得 $f(\tau)=1/2$。对函数 $f(x)$ 分别在区间$[a,\tau]$上和$[\tau,b]$上应用拉格朗日定理，有

$$f(\tau)-f(a)=(\tau-a)f'(\xi),\quad f(b)-f(\tau)=(b-\tau)f'(\eta),\quad \xi\neq\eta,$$

$$\frac{1}{2f'(\xi)}=\tau-a,\quad \frac{1}{2f'(\eta)}=b-\tau。$$

21. 提示：根据题意，存在 x_0，满足 $f(x_0)=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$。将函数在点 x_0 展出泰勒公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\theta)(x-x_0)^2$，由于 x_0 是极小值点，所以 $f'(x_0)=0$，在将 $x=0$ 和 $x=1$ 代入公式中，有

$$f(0)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\theta_1)x_0^2,\quad f(1)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\theta_2)(1-x_0)^2,$$

即$\frac{1}{2}f''(\theta_1)x_0^2=1$；$\frac{1}{2}f''(\theta_2)(1-x_0)^2=1$。当 $x_0\geqslant\frac{1}{2}$ 时，根据 $\frac{1}{2}f''(\theta_1)x_0^2=1$，显然 $f''(\theta_1)\geqslant 8$；当 $x_0\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$1-x_0\geqslant\frac{1}{2}$，根据$\frac{1}{2}f''(\theta_2)(1-x_0)^2=1$，有 $f''(\theta_2)\geqslant 8$。

22. 提示：利用泰勒公式：

$$f(x)=f(0)+f'(x)(x-0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-0)^2,$$

$$f(x)=f(1)+f'(x)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-1)^2,$$

两式相减得到：

$$|f'(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)(x-1)^2-f''(\xi_1)x^2|\leqslant|(x-1)^2+x^2|\leqslant 1。$$

23. 提示：(1) 令 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-(x+b)^{\frac{1}{n}}$，则 $f'(x)=\frac{1}{n}[x^{\frac{1}{n}-1}-(x+b)^{\frac{1}{n}-1}]>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增。又由于 $f(0)=0$，于是对任何的 $a>0$，有 $f(a)>f(0)=0$，即 $f(a)=a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-(a+b)^{\frac{1}{n}}>0$。

(2) 将不等式表示为$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}$，引入辅助函数 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$。

练习题 4-2 答案与提示

1. 提示：将数值不等式改为函数不等式。将 α 改为 x，引入辅助函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

求导，利用积分中值定理得到

$$F'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x^2}[xf(x)-xf(\xi)]=\frac{1}{x}[f(x)-f(\xi)]<0。$$

其中 $0<\xi<x$。于是 $F(x)$ 单调递减，对任意的 $0<x<1$，$F(x)>F(1)=0$。

2. 提示：对不等式变形，有$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$。将数值不等式转化为函数不等式，引入辅助函数$F(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$，求导，利用积分中值定理，得到

$$F'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x^2}[xf(x)-xf(\xi)]=\frac{1}{x}[f(x)-f(\xi)]<0,$$

其中$0<\xi<x$。所以$F(x)$单调递减，于是对$0<\alpha<\beta<1$，有$F(\alpha)>F(\beta)$，即

$$\frac{\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x}{\alpha}>\frac{\int_0^\beta f(x)\mathrm{d}x}{\beta}>\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x}{\beta}。$$

3. 提示：用特定值转化法，把$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$和$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$转化为函数在一特定点的函数值，根据积分中值定理以及闭区间连续函数性质，得到

$$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|,\xi\in(a,b)\quad 和 \quad \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(\eta)|,\eta\in[a,b]。$$

根据牛顿-莱布尼茨公式有$f(\eta)-f(\xi)=\int_\xi^\eta f'(x)\mathrm{d}x$，于是

$$|f(\eta)|-|f(\xi)|\leqslant|f(\eta)-f(\xi)|=\left|\int_\xi^\eta|f'(x)|\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

4. 提示：将b改为x，引入积分上限辅助函数$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)\\&=\frac{1}{2}(x-a)f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)],\xi\in(a,x)\\&=\frac{1}{2}(x-a)[f(x)-f(\xi)]\geqslant 0。\end{aligned}$$

于是$F(x)$单调增加，根据$a\leqslant b$，得到$F(b)\geqslant F(a)=0$，结论成立。

5. 提示：变形，将b改为x，引入积分上限函数$F(x)=[f(x)+f(a)]\frac{x-a}{2}-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(a)]+\frac{1}{2}(x-a)f'(x)-f(x),$$

$$F''(x)=\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}(x-a)f''(x)-f'(x)=\frac{1}{2}(x-a)f''(x)\geqslant 0,$$

于是$F'(x)$单调增加，所以$F'(b)\geqslant F'(a)=0$，所以$F(x)$单增，有$F(b)\geqslant F(a)=0$。

6. 提示：对$f(x)$在$[a,x]$上应用牛顿-莱布尼茨公式，有$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$。利用$f(a)=0$得到$f^2(x)\leqslant\left(\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2$，再利用柯西不等式，有

$$f^2(x)\leqslant\int_a^x[f'(x)]^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^x 1\mathrm{d}x=(x-a)\int_a^x[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant(x-a)\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

两边积分得到结论。

7. 提示：令$F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，显然$F(1)=F(0)=0$，满足罗尔定理的条件，存在一点$\xi$，使$F'(\xi)=0$。

8. 提示：这是一个计算性的证明，可以采用交换累次积分的次序去证明；也可以作差，求导，其导数等于0，说明是一个常函数，再取特定值，证明常数为0；

9. 提示：引入变限积分函数：令$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}tf(x)-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]。$$

可以证明 $f(x)\geqslant 0$。又令 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]\geqslant 0。$$

10. 提示：利用牛顿-莱布尼茨公式，得到 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，于是有 $f(0)=f(x)-\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以 $|f(0)|=\left|f(x)-\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant|f(x)|+\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant|f(x)|+\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant|f(x)|+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x$，对不等式两边积分有 $\int_0^a|f(0)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a\left[\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$，于是得到所证明的结论。

11. 提示：令 $nT\leqslant x\leqslant(n+1)T$，不妨设 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$（反之，同理证明），由于

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t=n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{x}+\frac{\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t}{x}。$$

由于 $f(x)$ 连续，且 $nT\leqslant x\leqslant(n+1)T$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=0$，且

$$\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{(n+1)T}\leqslant\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{nT}。$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

12. 提示：牛顿-莱布尼茨公式 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$；$f(1)-f(x)=\int_x^1 f'(x)\mathrm{d}x$，利用柯西不等式，有

$$f^2(x)\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}x\int_0^x[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant x\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

$$f^2(x)\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}x\int_x^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant(1-x)\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[(1-x)\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\&=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\right)\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

13. 提示：用拉格朗日定理 $f(x)-f(2)=(x-2)f'(\xi)$，$f(x)-f(4)=(x-4)f'(\eta)$，于是有 $|f(x)|\leqslant(x-2)\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}|f'(x)|$；$|f(x)|\leqslant(4-x)\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}|f'(x)|$，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_2^4|f(x)|\mathrm{d}x=\int_2^3|f(x)|\mathrm{d}x+\int_3^4|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x+\int_3^4(4-x)\mathrm{d}x\right)\max_{2\leqslant x\leqslant 4}|f'(x)|=\max_{2\leqslant x\leqslant 4}|f'(x)|。\end{aligned}$$

14. 提示：由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值，设 $|f(\xi)|=\max\limits_{x\in(a,b)}|f(x)|$，所以 $f(\xi)-f(a)=\int_a^\xi f'(x)\mathrm{d}x$；$f(b)-f(\xi)=\int_\xi^b f'(x)\mathrm{d}x$，于是 $|f(\xi)|\leqslant\int_a^\xi|f'(x)|\mathrm{d}x$，

$|f(\xi)| = \int_{\xi}^{b} |f'(x)| \mathrm{d}x$，所以

$$2|f(\xi)| \leqslant \int_{a}^{\xi} |f'(x)| \mathrm{d}x + \int_{\xi}^{b} |f'(x)| \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} |f'(x)| \mathrm{d}x。$$

15. 提示：利用周期函数性质得到$\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x$。由于$\int_{0}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x$，对积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x$做变量代换，令 $t = \pi - x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(|\cos t|)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos t|)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x。$$

16. 提示：本题是计算性的证明。(1) 计算 $F(-x)$，做负变换有

$$F(-x) = \int_{0}^{-x} (-x-2t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} (-x+2u)f(-u)(-\mathrm{d}u) = \int_{0}^{x} (x-2u)f(u)\mathrm{d}u = F(x)。$$

(2) 计算 $F'(x)$。$F(x) = \int_{0}^{x} (x-2t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_{0}^{x} tf(t)\mathrm{d}t$，由 $f(x)$ 单调不增得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - 2xf(x) = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - xf(x) \\ &= x[f(\xi) - f(x)] \geqslant 0, 0 < \xi < x。\end{aligned}$$

17. 提示：作差

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin x - \cos x}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0。$$

考研真题答案与提示

数一真题与数三真题证明过程略，详见考研真题。

思考题答案：(1) $\mathrm{e}^{-x}[f(x)+1]$；(2) $\mathrm{e}^{x}[f(x)-2]$；(3) $\mathrm{e}^{2x}f'(x)$；(4) $\mathrm{e}^{-4x}f'(x)$；(5) $xf(x)-x$；(6) $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}f(x)$；(7) $\frac{f(x)}{x}$；(8) $\frac{f'(x)}{x^2}$。

第 5 章

一元函数微积分的应用

基本概念

1. 极值点、极值、最值；
2. 单调增加、单调减少、单调区间；
3. 拐点、凸凹函数、凸凹区间；
4. 切线、法线、渐近线；
5. 函数的平均值；
*6. 曲率、曲率半径。

基本方法

1. 求函数的极值点和极值；
2. 求函数的单调区间；
3. 求函数的最大值和最小值；
4. 求函数的凹凸区间和拐点；
5. 求曲线的切线、法线、渐近线方程；
6. 计算平面区域的面积；
7. 计算立体的体积；
*8. 计算平面曲线的弧长；
*9. 计算曲率、曲率半径；
*10. 计算旋转曲面的面积；
*11. 计算液体压力；
*12. 计算物体之间的引力；
*13. 计算变力做功；
*14. 计算变密度物体的质量；
***15. 微积分在经济中的应用。

5.1 函数图像的几何性质

一、基本概念

定义 1 极值点与极值 设 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义，若 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$有

$$f(x)<f(x_0)\quad (f(x)>f(x_0)),$$

则称 x_0 为 $f(x)$的**极大值点(极小值点)**；函数值 $f(x_0)$为 $f(x)$的**极大值(极小值)**。

极大值点和极小值点统称为**极值点**；极大值和极小值统称为**极值**。

定义 2 凸凹函数 设 $f(x)$在 I 上连续，若对任意 $x_1,x_2\in I$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**凹函数(凸函数)**，或称 $f(x)$在 I 上是**凹的(凸的)**。

凸凹函数的图像特征：

凹函数曲线上的任意两点连线段都在曲线的上方，凸函数曲线上的任意两点连线段都在曲线的下方。

定义 3 拐点 若函数 $f(x)$在点 x_0 连续，左右邻域的凸凹性不同，则称$(x_0,f(x_0))$是函数 $f(x)$的**拐点**。

定义 4 切线 设 M 是曲线 C：$y=f(x)$上一点，N 是曲线上任意一点，作割线 MN，当 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，割线 MN 绕 M 转动的极限位置 MT，就是曲线 C 在点 M 处的**切线**。

定义 5 法线 过切点且和切线垂直的直线称为**法线**。

定义 6 渐近线 若曲线 $y=f(x)$上的点沿曲线无限远离原点时，它与定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 就是曲线 $y=f(x)$的**渐近线**。

定义 7 函数的平均值 称定积分 $\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的**平均值**。

定义 8 曲率 称极限

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为曲线 C 在点 M 处的**曲率**，其中 Δs 是曲线 C 上的$\overset{\frown}{MM'}$弧长，$\Delta\alpha$ 是此段弧长转过的角度。而且

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

并称 $\rho=\dfrac{1}{K}$为曲线 C 在点 M 处的**曲率半径**。

曲率的几何意义：

曲率是刻画曲线的弯曲程度的量，曲率越大，曲线弯曲程度越大；曲率越小，曲线弯曲程度越小；直线的曲率为零。

二、基本方法

题型1 求函数的极值点和极值

有两类点可能成为极值点：(1)导数等于0的点(驻点)；(2)导数不存在的点。

需要说明的是：上述两类点仅仅可能是极值点，未必是极值点。所以我们将导数等于0的点和导数不存在的点统称为**疑似极值点**。

判断疑似极值点是否是极值点的具体方法：

方法1 几何方法 若 x_0 的左右邻域的单调性不同，则 x_0 是极值点，$f(x_0)$是极值。

所谓的几何方法就是：根据函数图像，x_0 的左侧单调增加右侧单调减少，x_0 是极大值点；x_0 的左侧单调减少右侧单调增加，x_0 是极小值点。

方法2 代数方法 若 $f'(x_0)=0$，计算 $f(x)$在 x_0 的二阶导数，若 $f''(x_0)\neq 0$，则 x_0 是极值点，如果 $f''(x_0)>0$，x_0 是极小值点；如果 $f''(x_0)<0$，x_0 是极大值点。

注 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0, \cdots, f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，如果 n 是偶数，x_0 是极值点，如果 n 是奇数，x_0 不是极值点。

题型2 求函数的单调区间

求函数 $y=f(x)$的单调区间具体方法：

(1) 求函数 $f(x)$的定义域；

(2) 在定义域内求 $f(x)$的疑似极值点；

(3) 用疑似极值点将定义域分成若干个区间，判断 $f'(x)$在每个区间内的符号。若 $f'(x)>0$，单调增加；若 $f'(x)<0$，单调减少。从而得到函数单调区间以及每个区间的单调性。

题型3 求函数的最大值和最小值

求函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上最大值和最小值具体方法：

(1) 在$[a,b]$上求函数 $f(x)$的疑似极值点；

(2) 计算疑似极值点和区间端点的函数值，比较大小，最大者就是函数在这个闭区间上的最大值，最小者就是函数在这个闭区间上的最小值。

注 函数的最值点在疑似极值点和区间端点中产生。

题型4 求函数的凹凸区间和拐点

1. 拐点：曲线 $y=f(x)$的拐点(横坐标)产生在二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点，判断这两类点是否是拐点有两个方法：

(1) 几何方法：若 x_0 左右两侧的凸凹性不同，则$(x_0, f(x_0))$是拐点，否则不是拐点；

(2) 代数方法：若 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，则$(x_0, f(x_0))$是拐点。

二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点可能是拐点，也可能不是拐点，所以我们称这两类点为**疑似拐点**。

2. 凸凹区间：求函数 $y=f(x)$的凹凸区间、拐点的具体方法：

(1) 求函数 $f(x)$的定义域；

(2) 求函数 $f(x)$的疑似拐点；

(3) 用疑似拐点将定义域分成若干个区间，并判断 $f''(x)$在每个区间内的符号。若

$f''(x)>0$,曲线是凹的;若 $f''(x)<0$,曲线是凸的。从而得到函数的凸凹区间以及每个区间的凸凹性。

题型5 求曲线的切线、法线和渐近线

若 $f(x)$ 可导,则曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程和法线方程分别为

切线方程:$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$;

法线方程:$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

曲线的渐近线有三种情形:

(1) 水平渐近线:若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,则称 $y=a$ 是水平渐近线;若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$,则称 $y=a$ 是 x 趋于正无穷大或 x 趋于负无穷大时的水平渐近线。

(2) 铅直渐近线:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则称 $x=x_0$ 是铅直渐近线;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,则称 $x=x_0$ 是 x 从 x_0 右侧趋于 x_0 或 x 从 x_0 左侧趋于 x_0 时的铅直渐近线。

(3) 斜渐近线:若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0,b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$,则 $y=kx+b$ 是斜渐近线。

例5.1 已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,求:

(1) 函数的单调区间及极值;(2) 函数图形的凸凹区间及拐点;(3) 曲线的渐近线。

解 函数定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。

(1) 由于 $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,令 $y'=0$,得到 $x_1=0,x_2=3$。用这两个点将定义域分成四个区间:$(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,3)$ 和 $(3,+\infty)$。

在 $(-\infty,0)$,$(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上,$y'>0$,单调增加;在 $(1,3)$ 上,$y'<0$,单调减少。于是 $x=3$ 是极小值点,极小值为 $y|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$。

(2) 由于 $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$,令 $y''=0$,得到 $x=0$。用这个点将定义域分成三个区间:$(-\infty,0)$,$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$。

在 $(-\infty,0)$ 上,$y''<0$,凸的;在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上,$y''>0$,凹的,$(0,0)$ 是曲线的拐点。

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$,则 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线;又由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1;\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2,$$

故 $y=x+2$ 是函数曲线的斜渐近线。

例5.2 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2,求 a,b 的值,并求 $y=f(x)$ 的所有极大值、极小值和拐点。

分析 根据已知条件,函数在 $x=1$ 处有极值 -2,可以建立两个等式 $f(1)=2$ 和 $f'(1)=0$,从而求出未知常数 a,b。

解 根据已知有 $f(1)=1+a+b=-2$,$f'(1)=3+2a+b=0$,解得 $a=0,b=-3$。从而

函数表达式为 $f(x)=x^3-3x$。

求导 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1,x_2=1$。由于 $f''(x)=6x$，于是 $f''(-1)=-6<0,f''(1)=6>0$，所以 $x_1=-1$ 是极大值点，极大值为 $f(-1)=2$；$x_1=1$ 是极小值点，极小值为 $f(1)=-2$。

由于 $f''(x)=6x$，令 $f''(x)=0$，则 $x=0$，由于 $f'''(x)=6\neq0$，所以$(0,0)$是拐点。

例 5.3 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得曲线、切线与 $x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成的图形面积最小。

分析 本题要求的是求曲线的切线，当然，我们只需求切点，或只需求切点的横坐标，如果令其为 $x=a$，那么由曲线、切线与 $x=1,x=\mathrm{e}^2$ 围成区域的面积可表示为关于字母 a 的函数 $S(a)$，于是问题转化为：$S(a)$取最小值时，求 a 的值，自然有导函数 $S'(a)=0$，从而求出 a 的值。

解 曲线 $y=\ln x$ 上的点$(a,\ln a)(a>0)$的切线方程是

$$y=\ln a+\frac{1}{a}(x-a)。$$

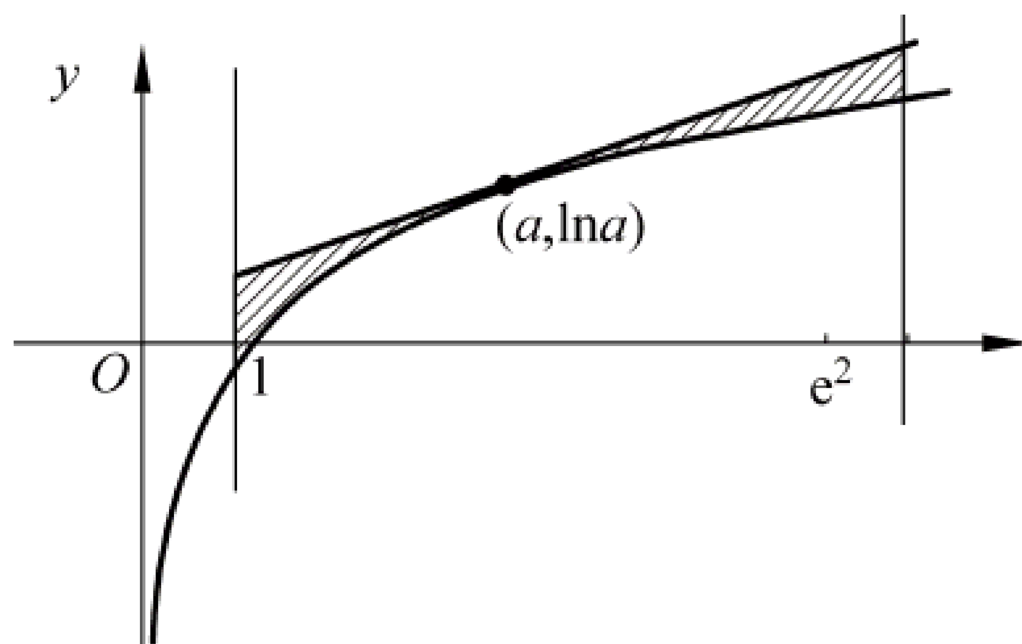


图 5-1

则由 $y=\ln x,y=\ln a+\dfrac{1}{a}(x-a),x=1$ 和 $x=\mathrm{e}^2$ 所围成的图形，如图 5-1 所示，面积为

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_1^{\mathrm{e}^2}\left[\ln a+\frac{1}{a}(x-a)-\ln x\right]\mathrm{d}x\\&=\ln a\cdot(\mathrm{e}^2-1)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}x^2-ax\right)\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2}\\&=(\mathrm{e}^2-1)\left(\ln a+\frac{1+\mathrm{e}^2}{2a}-1\right)-\mathrm{e}^2-1。\end{aligned}$$

对 a 求导，得到 $S'(a)=(\mathrm{e}^2-1)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1+\mathrm{e}^2}{2a^2}\right)$。令 $S'(a)=0$，解得 $a_0=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^2)$。而

$$S''(a_0)=S''(a)\Big|_{a=a_0}=(\mathrm{e}^2-1)\left(-\frac{1}{a^2}+\frac{1+\mathrm{e}^2}{a^3}\right)_{a=a_0}=4\frac{\mathrm{e}^2-1}{(1+\mathrm{e}^2)^2}>0,$$

所以 $S(a)$在 $a=a_0$ 处取极小值，且是唯一的极小值点，所以是最小值点。于是所求切线方程为

$$y-\ln a_0=\frac{1}{a_0}(x-a_0),\quad 即\quad y-\ln\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}=\frac{2}{1+\mathrm{e}^2}x-1。$$

注 本题尽管是求曲线的切线，但具有一定的综合性。它涉及三个方面的问题：①求曲线的切线；②求曲线围成区域的面积；③求函数的最值点和最值。

例 5.4 设函数 $f(x)$对一切实数 x 满足微分方程 $xf''(x)+3x[f'(x)]=1-\mathrm{e}^{-x}$。

(1) 若函数 $f(x)$在点 $x=c(c\neq0)$有极值，证明它是极小值；

(2) 若函数 $f(x)$在点 $x=0$ 有极值，它是极大值还是极小值？

分析 判断极值点是极大值点还是极小值点有两个方法：几何方法和代数方法。由于不知道 $f(x)$的表达式，所以更适合用代数法。于是解题基本思路：问题(1)只需证明：$f''(c)>0$；问题(2)是判断 $f''(0)$的符号。

解 (1) 因为 $f(x)$在点 $x=c(c\neq0)$有极值，所以 $f'(c)=0$，将 $x=c$ 代入方程中，得到

$$cf''(c)+3c[f'(c)]=1-\mathrm{e}^{-c},$$

因此 $f''(c)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-c}}{c}>0$，所以 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

(2) 因为 $f(x)$ 具有二阶导函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 有极值，所以 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$，

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}f''(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2\right\}=1>0,$$

故 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值。

例 5.5 函数 $f(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)\mathrm{d}t\,(0\leqslant a\leqslant 2)$，求：

(1) $f(x)$ 的极大值 M 用 a 表示出来； (2) 将(1)中的 M 看作 a 函数，求 M 的最值。

解 (1) 因为 $f'(x)=x^2-a^2$，$f''(x)=2x$。令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-a$，$x_2=a$。由于 $f''(-a)=-2a<0$，所以 $x=-a$ 是极大值点，极大值为

$$M=f(-a)=-2a+\int_0^{-a}(t^2-a^2)\mathrm{d}t=-2a+\frac{2}{3}a^3。$$

(2) 由于 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}a}=-2+2a^2$，令 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}a}=0$，则在区间 $[0,2]$ 上的驻点为 $a=1$，所以

$$M_{\max}=\max\{M(0),M(1),M(2)\}=\max\left\{0,-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}=\frac{4}{3};$$

$$M_{\min}=\min\{M(0),M(1),M(2)\}=\min\left\{0,-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}=-\frac{4}{3}。$$

例 5.6 设对任意实数 x 有 $f'(-x)=x[f'(x)-1]$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 的极值。

分析 求函数的极值需要求极值点。首先求疑似极值点，但求疑似极值点的前提必须知道函数的表达式，于是解决这个问题的关键是通过已知条件，求函数 $f(x)$ 的表达式。

解 求函数 $f(x)$ 的解析式。依题意有

$$f'(-x)=x[f'(x)-1],\quad f'(x)=-x[f'(-x)-1],$$

解方程组，得到 $f'(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$，所以

$$f(x)=\int\frac{x^2+x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x+C。$$

由于 $f(0)=0$，所以 $C=0$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x$。

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$。由于 $f''(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$，则有

$$f''(0)=1>0,\quad f''(-1)=-\frac{1}{2}<0。$$

所以 $f(0)=0$ 是极小值，$f(-1)=\dfrac{1}{2}\ln2+\dfrac{\pi}{4}-1$ 是极大值。

例 5.7 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x-1|}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线方程。

解 显然，$x=1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线。又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 是 x

从0的右侧趋于0时的铅直渐近线。因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，所以没有水平渐近线。由于

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}e^{\frac{1}{x}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)e^{\frac{1}{x}}-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)}{x-1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+x}{x-1}=2。$$

所以$y=x+2$是曲线$y=f(x)$当$x\to+\infty$时的斜渐近线。

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x(1-x)}e^{\frac{1}{x}}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{1-x}e^{\frac{1}{x}}+x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)e^{\frac{1}{x}}-x^2+x}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)}{1-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+x}{1-x}=-2。$$

所以$y=-x-2$是曲线$y=f(x)$当$x\to-\infty$时的斜渐近线。

求曲线渐近线方法综述

(1) 求铅直渐近线：寻找没有定义的点x_0，并计算其极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，若是无穷大，则$x=x_0$就是铅直渐近线。

(2) 求水平渐近线：计算$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$，或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，若极限存在且等于$a$，则$y=a$就是水平渐近线。

(3) 求斜渐近线：计算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，若极限存在且等于$k(k\neq0)$，再计算$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$，若极限存在且等于$b$，则$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的斜渐近线。

练习题 5-1

1. 在数列$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$中，求出最大一个数。

2. 求函数$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$的最大值和最小值。

3. 求函数$f(x)=\int_0^1|x^2-t^2|dt$的最大值和最小值。

4. 求曲线$y=\ln x$在$[2,6]$内一条切线，使得该切线与直线$x=2,x=6$和曲线$y=\ln x$所围成的图形面积为最小。

5. 求对数螺线$\rho=e^\theta$在点$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线的直角坐标方程。

6. 设函数$f(x)$是定义在$x\geqslant1$上的正值函数，试求函数

$$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)dt$$

在$[1,+\infty)$上的极值点。

7. 求由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定的隐函数$y=y(x)$的极值。

8. 求通过点(1,1)的直线 $y=f(x)$ 中，使得 $\int_0^2[x^2-f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为最小的直线方程。

9. 设函数 $f(x)=x+a\cos x(a>1)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内有极小值，且极小值是 0，求函数在区间 $(0,2\pi)$ 内的极大值。

10. 设 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，在 $(0,1)$ 内 $y\geqslant 0$，且该曲线与 x 轴以及 $x=1$ 所围成的图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b 和 c 使此图形绕 x 轴旋转一周的立体的体积最小。

11. 求下列曲线的渐近线：

(1) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$；　　(2) $f(x)=\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$。

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x+1}}, & x<-1,\\ \ln(1-x^2), & -1<x<1,\\ x3^{\frac{1}{x}}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线。

13. 求曲线 $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 的渐近线。

14. 设函数 $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$。求：

(1) 函数的单调区间及极值；(2) 函数图形的凸凹区间及拐点；(3) 曲线的渐近线。

15. 已知点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

(1) 求常数 a,b；(2) 对确定常数 a,b 的曲线 $y=ax^3+bx^2$，求它的极值点和极值。

5.2 微元法在计算面积、体积、弧长中的应用

微元法是指在处理问题时，从对事物的极小部分(微元——微小单元)分析入手，达到解决事物整体目的的方法。它是解决物理问题、数学问题中的常用方法，基本思想就是“化整为零”，先求出“微元”，在通过微元求出“整体”。在求“微元”中，将变量看成常量。

微元法又叫**元素法**，是定积分的基本方法，分四个步骤：

1. 分割：将总量分割成 n 个微小单元(微元)；

2. 求微元近似值：将微元中的变量看作常量，求微元的近似值；

3. 累加：求和，得到总量的近似值；

4. 取极限：求总量的近似值的极限，将极限表示为定积分。

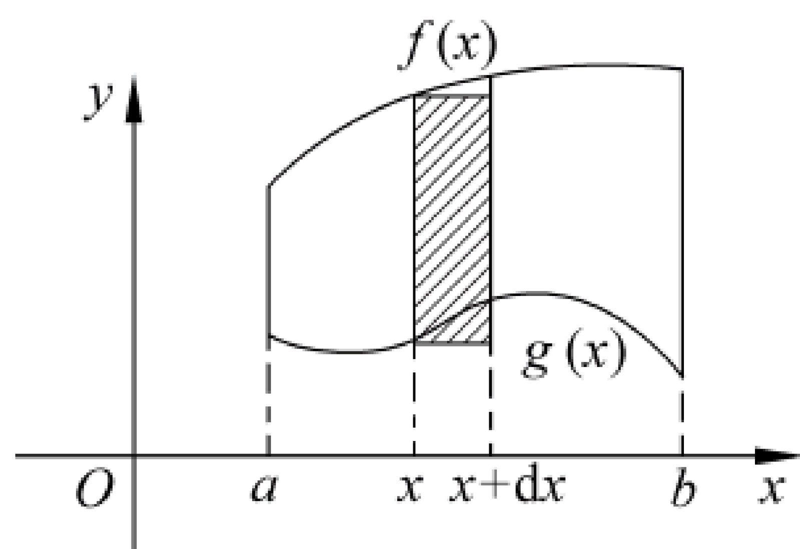
这四个步骤的关键是第二步，求微元的近似值。微元的近似值确定了，总量就可以表示为定积分。而求微元的近似值的关键是如何建立坐标系，如何分割，这两项工作要有利于求微元的近似值。

下面用微元法给出平面图形的面积和已知截面的立体体积：

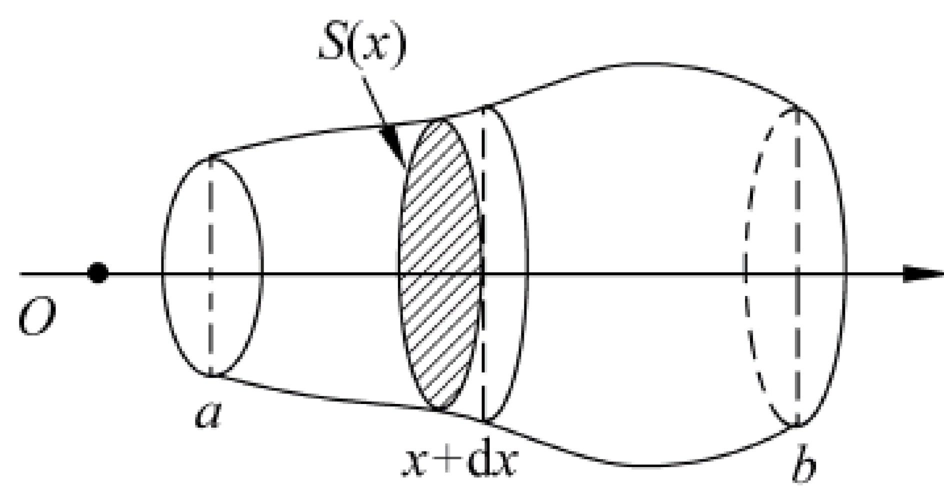
1. 求平面图形面积：建立平面直角坐标系，如图 5-2(a)所示，图形分布在区间 $[a,b]$ 上，在 $[a,b]$ 内任选一点 x，以及 $x+\mathrm{d}x$，过二点用垂直于 x 轴的直线，进行分割，得到条形区域(微元)，将这一条形区域看作长方形，长方形的长是 $f(x)-g(x)$，宽是 $\mathrm{d}x$，于是这条形区域的面积近似等于 $[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}S=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，它就是定积分的被积表达式，

积分区间就是变量 x 的变化范围 $[a,b]$。于是平面图形的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x。$$



(a)



(b)

图 5-2

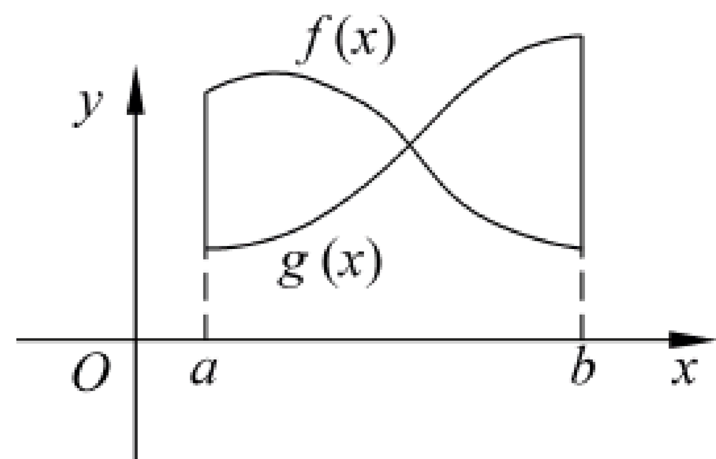
2. 求已知截面立体体积：建立坐标系或坐标轴，如图 5-2(b)所示，整体图形分布在 $[a,b]$ 上，在 $[a,b]$ 内任选一点 x，以及 $x+\mathrm{d}x$，过二点用垂直于 x 轴的平面截立体，得到一片立体，将此立体看作柱体，柱体的底面(截面)为 $S(x)$，柱体的高为 $\mathrm{d}x$，从而截得空间体的体积近似等于 $S(x)\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x$，它就是定积分的被积表达式，积分区间是变量 x 的变化范围 $[a,b]$，于是立体图形的体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$。

下面的面积公式、体积公式和弧长公式都是用微元法建立的，有兴趣的同学可以自己练习推导，这对你理解和掌握微元法和计算公式具有十分重要的意义。

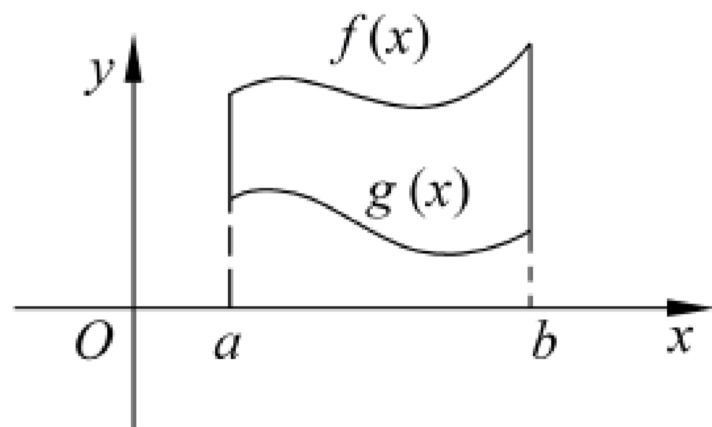
题型 6 计算平面图形的面积

(1) 在直角坐标系下，由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$ 和 $x=b$ 围成的图形，如图 5-3(a)所示，面积为 $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$。

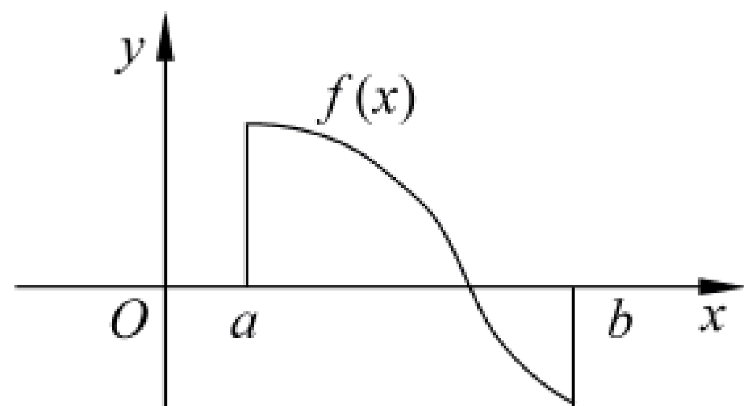
当 $f(x)\geqslant g(x)$ 时，由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$ 和 $x=b$ 围成的图形，如图 5-3(b)所示，面积为 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$。



(a)



(b)



(c)

图 5-3

特别地，由曲线 $y=f(x)$，x 轴，$x=a$ 和 $x=b$ 围成的图形，如图 5-3(c)所示，面积为

$$S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x。$$

(2) 在极坐标系下，由曲线 $r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$，$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的区域，如图 5-4(a)所示，$D=\{(r,\theta)\mid\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\}$，面积为 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$。

特别地，由 $r=r(\theta)$，$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的图形，如图 5-4(b)所示，面积是

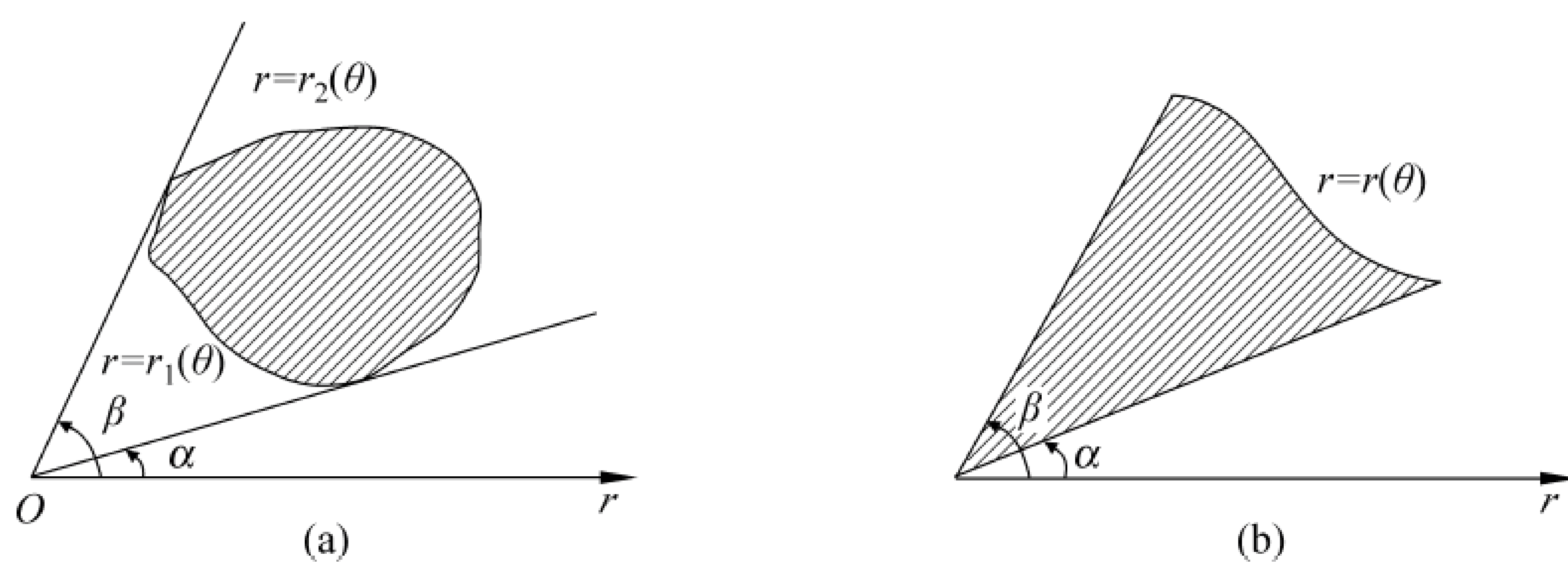


图 5-4

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}(\theta)\mathrm{d}\theta。$$

(3) 若图形由 x 轴, $x=a$, $x=b(a<b)$ 以及由参数方程: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出的曲线围成,且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续的导数,且 $\varphi'(t)$ 不变号,则平面图形的面积为 $S=\int_a^b|y|\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}|\psi(t)|\varphi'(t)\mathrm{d}t$。

*(4) 若平面图形的边界曲线为 L(正向曲线),则区域 D 的面积为

$$\overline{D}=\frac{1}{2}\int_{L}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x。$$

注 方法 4 仅限数一和数二,数三不要求。

题型 7 计算空间体的体积

(1) **已知截面立体的体积**:设立体 Ω 介于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间,如图 5-2(b)所示,对 $\forall x\in(a,b)$,垂直于 x 轴的平面截立体 Ω,其截面面积为 $S(x)$,则 Ω 的立体体积为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x。$$

(2) **旋转体的体积**:连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$、x 轴、$x=a$ 和 $x=b$ 围成曲边梯形,该平面图形绕 x 轴旋转,如图 5-5(a)所示,其体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$;

平面图形绕 y 轴旋转,如图 5-5(b)所示,其体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,\quad 0<a<b。$$

注 旋转体体积公式只适合计算**竖在 x 轴上的曲边梯形**绕 x 轴和 y 轴旋转而成的旋转体。

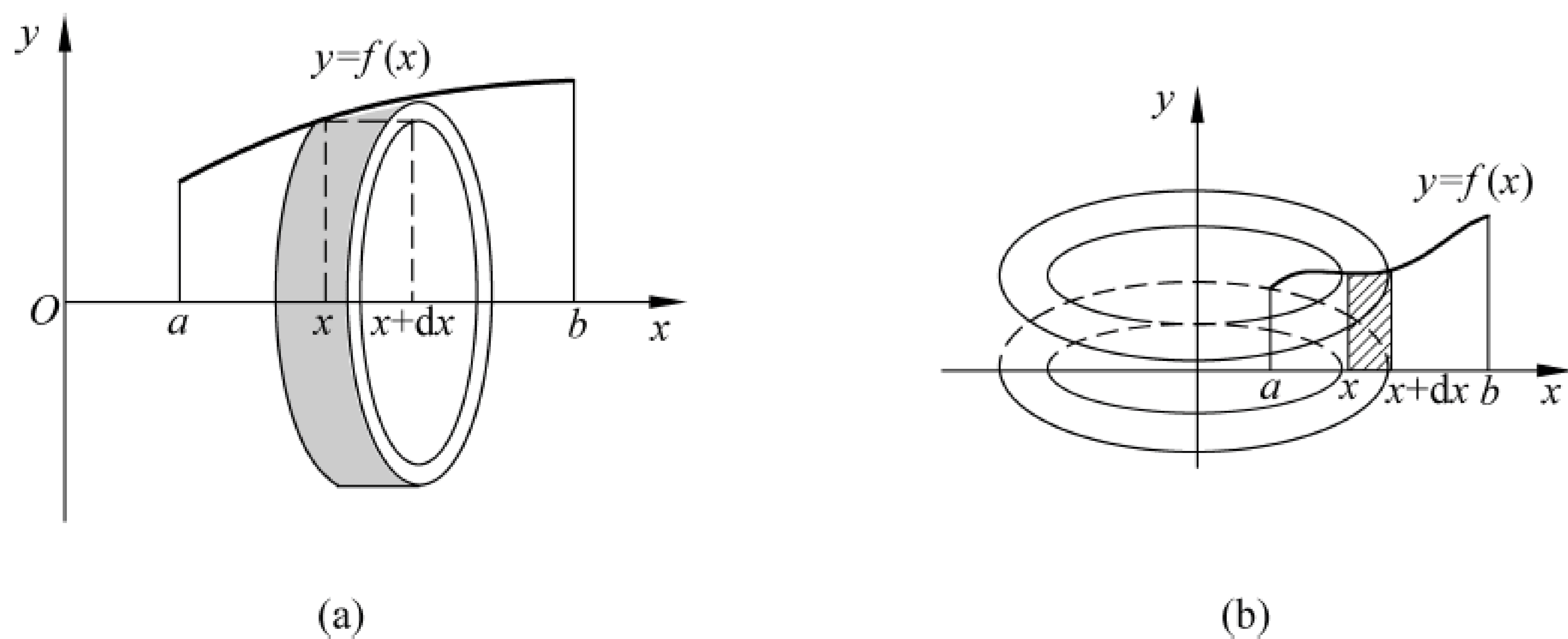


图 5-5

*题型8 计算曲线的弧长

(1) 平面曲线用参数方程：$x=x(t),y=y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$表示，$x(t),y(t)$具有连续导数，则曲线弧长 $s=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$；

(2) 平面曲线用一般方程：$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$表示，$f(x)$具有连续导数，则曲线弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x;$$

(3) 平面曲线用极坐标方程：$r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示，$r(\theta)$具有连续导数，则曲线弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta。$$

*题型9 计算曲率和曲率半径

(1) 曲线 $y=f(x)$的曲率为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$；

(2) 曲线方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$，则曲率为 $K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$；

(3) 曲率半径为 $\rho=\frac{1}{K}$。

*题型10 求旋转曲面的面积

在 x 轴上方有一平面曲线 AB 绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面的面积：

(1) 平面曲线用参数方程：$x=x(t),y=y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$表示，则旋转曲面面积为

$$S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t;$$

(2) 平面曲线用一般方程：$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$表示，则旋转曲面面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x;$$

(3) 平面曲线用极坐标方程：$r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示，则旋转曲面面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta。$$

例5.8 求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$围成图形的面积。

解 曲线关于 x 轴和 y 轴都对称，所以该图形的面积是第一象限部分图形面积的4倍，于是：

【方法1】$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x$。令 $x=a\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=a\cos\theta\mathrm{d}\theta$，于是

$$S=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=ab\pi。$$

【方法2】曲线的参数方程为 $x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$，则

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=ab\pi。$$

*【方法3】曲线 L 的参数方程为 $x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$，则

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos\theta\cdot b\cos\theta-b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=ab\pi。$$

例 5.9 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 x 轴所围成的面积。

解 根据面积公式

$$S=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=3\pi a^2。$$

例 5.10 求星形线 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$ 所围成的区域 D 的面积。

解 【方法 1】由于星形线关于 x 轴和 y 轴对称，令 D_1 是 D 在第一象限部分，则

$$\begin{aligned}\overline{D}&=4\overline{D}_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\mathrm{d}\theta\\&=12a^2\cdot\left(\frac{3!!}{4!!}-\frac{5!!}{6!!}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi a^2。\end{aligned}$$

*【方法 2】曲线积分法

$$\overline{D}=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta\cdot\cos\theta-a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta=6a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi a^2。$$

例 5.11 求半径为 r 的圆绕距离圆心为 $R(R>r)$的直线旋转而成的圆环体的体积。

解 建立坐标系，如图 5-6 所示，则圆的方程为 $x^2+(y-R)^2=r^2$。圆环体可以看作由曲线 $y=R+\sqrt{r^2-x^2}$，$x=\pm r$ 和 x 轴的围成的曲边梯形，以及 $y=R-\sqrt{r^2-x^2}$，$x=\pm r$ 和 x 轴围成的曲边梯形分别绕 x 轴旋转体的体积的差。所以

$$\begin{aligned}V&=\int_{-r}^r\pi(R+\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-r}^r\pi(R-\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x\\&=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=8\pi R\cdot\frac{1}{4}\pi r^2=2\pi^2 r^2 R。\end{aligned}$$

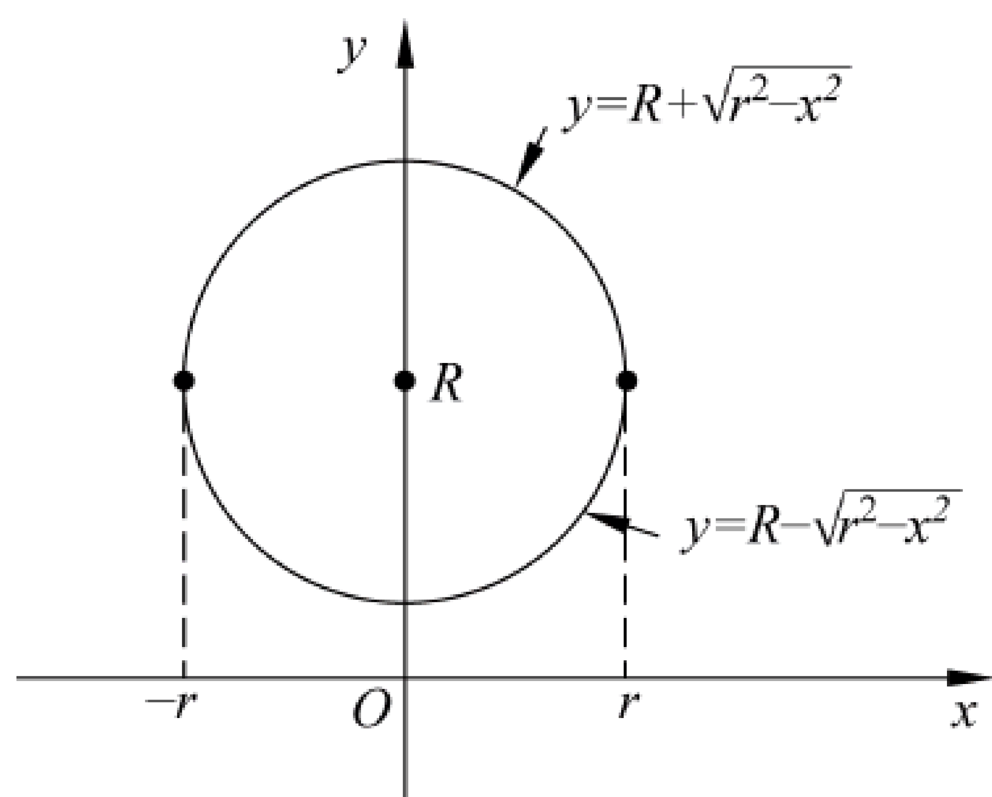


图 5-6

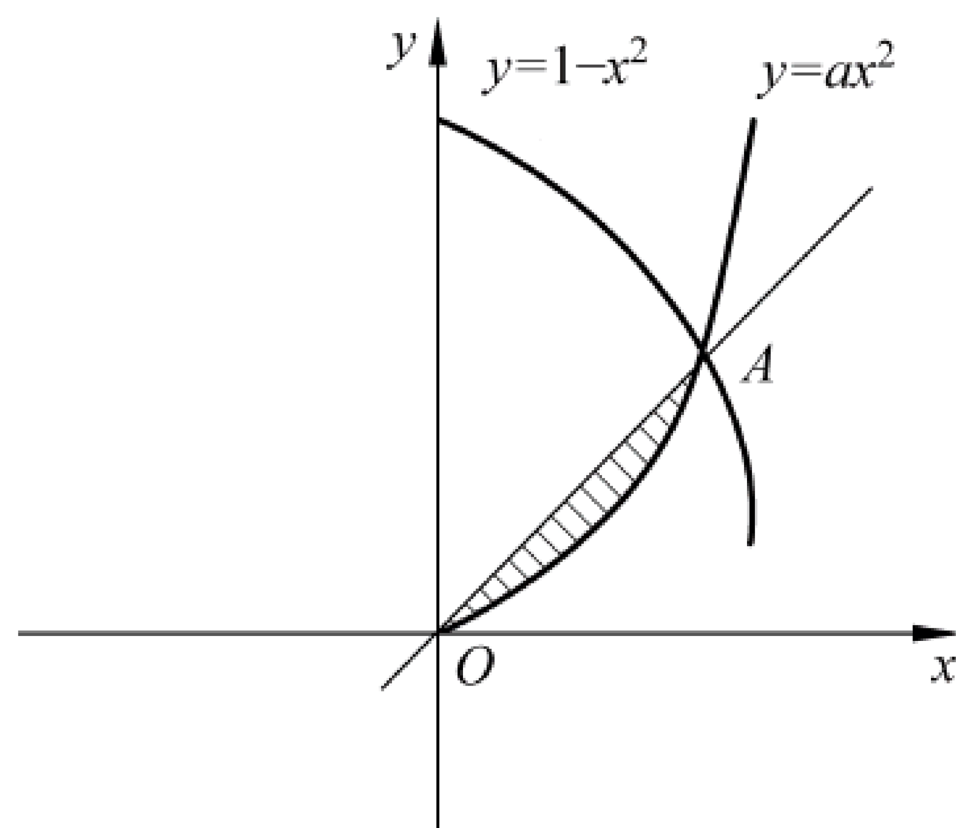


图 5-7

例 5.12 设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$与 $y=1-x^2$ 交于 A 点，过原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成平面图形。问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大，最大值是多少？

解 如图 5-7 所示，当 $x\geqslant 0$ 时，曲线 $y=ax^2$ 与 $y=1-x^2$ 交点坐标为 $A\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$，

从而直线 OA 方程为 $y=\dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$，于是平面图形(阴影部分)绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^2-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}。$$

对变量 a 求导，并令其等于零，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi}{15}\frac{2a\,(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\,\frac{5}{2}\,(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15\,(1+a)^{7/2}}=0,$$

解得驻点 $a=4$。由实际问题的性质知，当 $a=4$ 时，体积 V 取到最大值，其最大值为

$$V_{\max}=\frac{2\pi}{15}\frac{16}{5^{5/2}}。$$

* **例 5.13** 求曲线 $y=\int_8^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ 的全长。

分析 首先需要确定曲线起点和终点，即函数的定义域。根据被积函数，可知 $2n\pi\leqslant t\leqslant(2n+1)\pi$，由于积分的下限 8，则 $2n\pi\leqslant 8\leqslant(2n+1)\pi$，所以 $n=1$。从而函数的定义域为 $[2\pi,3\pi]$。

解 函数 $y=\int_8^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域是 $[2\pi,3\pi]$。由于 $y'=\sqrt{\sin x}$，故曲线全长

$$s=\int_{2\pi}^{3\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_{2\pi}^{3\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{2\pi}^{3\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\bigg|_{2\pi}^{3\pi}=4。$$

* **例 5.14** 求曲线 $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}(a>0)$ 的全长。

分析 曲线 $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ 是一个闭合曲线，并且还是一个连续的周期函数，其周期是 6π，即区间 $[6n\pi,(6n+6)\pi]$ 上的曲线与区间 $[0,6\pi]$ 上的曲线完全重合。事实上，当 $\theta=0$ 和 $\theta=3\pi$ 时 $\rho=0$，于是曲线在 $[0,3\pi]$ 上构成闭合曲线，且在 $[3\pi,6\pi]$ 范围的曲线与在 $[0,3\pi]$ 范围的曲线完全重合。

解 $$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=3a\int_0^{\pi}\sin^2u\,\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\pi a。$$

* **例 5.15** 设一容器是曲线 $y=x^3(0\leqslant x\leqslant 80)$ 绕 y 轴旋转而成。现以 $8\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 速度向容器注水，求水面上升到 64cm 时，水面上升的速度和液面面积的扩大速度。

分析 首先需要明确水面上升的速度和液面面积的扩大速度的表示。事实上，某个变量的变换速度就是这个量对时间的变化率，即对时间的导数。例如，如果令液面面积为 S，则 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 就是液面面积的扩大速度。

解 如图 5-8 所示，设时刻 t(s)时液面高度为 h(cm)，则有

$$\pi\int_0^h x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^h y^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y=8t。$$

对 t 求导，h 是 t 函数，得到 $\pi h^{\frac{2}{3}}\frac{dh}{dt}=8$。于是当 $h=64$cm 时，$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=64}=\frac{1}{2\pi}$(cm/s)，即液面上升到 64cm 时，水面上升的速度$\frac{1}{2\pi}$(cm/s)。

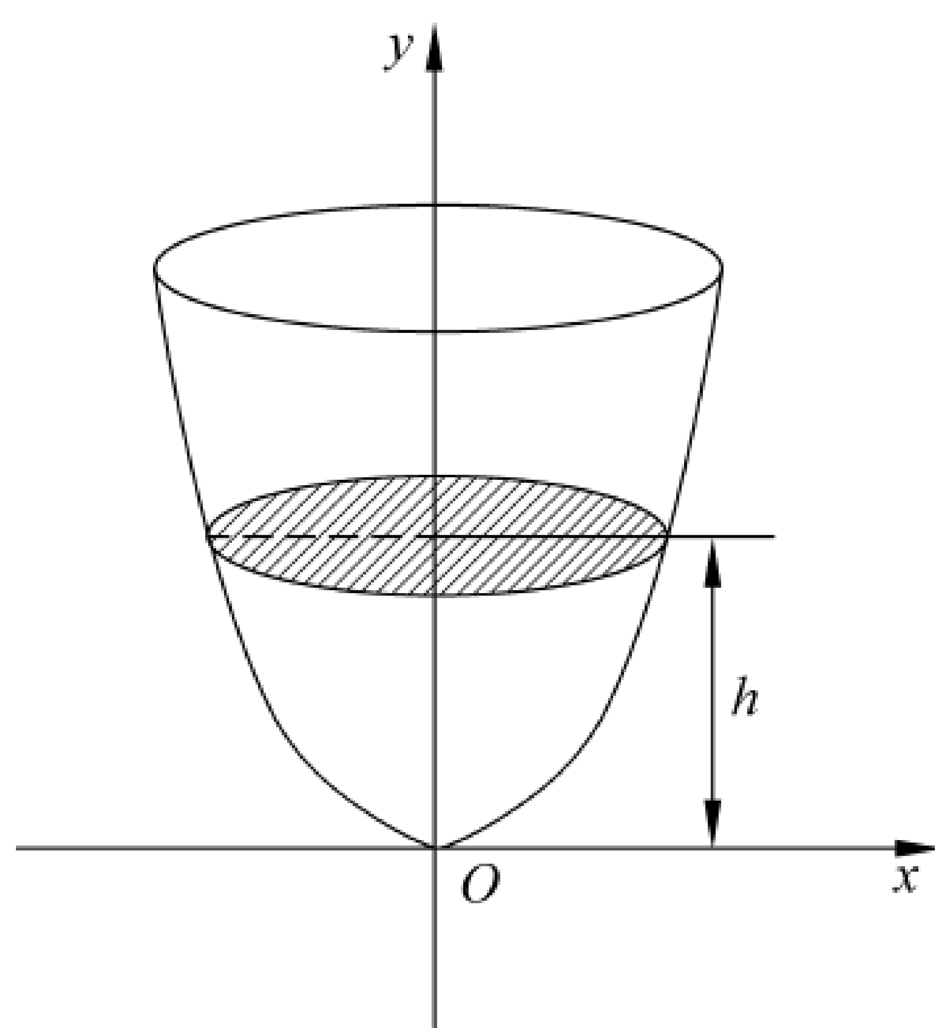


图 5-8

由于液面面积 $S=\pi x^2=\pi h^{\frac{2}{3}}$，所以

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{h=64}=\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot h^{-\frac{1}{3}}\cdot\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=64}=\frac{1}{12}(\text{cm/s})。$$

* **例 5.16** 求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大点的坐标和曲率半径。

分析 求曲线的曲率最大值点，当然首先求曲率(实质是曲率函数)，然后求曲率函数的最大值点，从而求出曲率最大值点的坐标及其曲率半径。

解 由于 $y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$。根据曲率公式得到

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},\quad x>0。$$

为了求曲率最大值，求导得

$$\frac{dK}{dx}=\frac{(x^2+1)^{3/2}-x\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x^2+1}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}}。$$

令$\frac{dK}{dx}=0$，解得稳定点 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$舍去。又由于

$$\lim_{x\to 0^+}K=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}K=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}=0,$$

故 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$是 K 在$(0,+\infty)$内唯一的稳定点，即是曲率的最大值点，最大值为

$$K_{\max}=K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

求得曲率的最大值的点的坐标为$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$，曲率半径为 $\rho=\frac{3}{2}\sqrt{3}$。

微元法计算平面图形面积、立体体积、曲线的弧长方法综述

(1) 计算平面图形面积：确定平面图形是曲边梯形，还是广义扇形，或表示为几个曲边梯形和广义扇形。对各自的图形，利用相应的面积公式，求出平面图形的面积。

(2) 计算空间体的体积：确定空间体是旋转体，还是已知截面的立体。如果是旋转体，利用旋转体的体积公式；如果是已知截面的立体，用微元法确定截面的面积，从而把空间体体积表示为定积分。

(3) 计算曲线的弧长：确定曲线方程是一般方程，还是参数方程，还是极坐标方程，利用相应的计算曲线弧长公式，计算曲线的弧长。

(4) 对非常规的面积、体积和弧长问题，如果没有适合的可以利用的公式，只能用微元

法，将所求量表示为定积分。

练习题 5-2

1. 求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$；　　(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和两坐标轴；

(3) $y=x(1-x^2)$ 与 x 轴；　　(4) $y=x^3-6x$ 和 $y=x^2$；

(5) $\rho=2a\cos\theta(a>0)$；　　(6) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)(a>0)$。

2. 求下列曲线绕轴旋转的旋转体的体积：

(1) $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周；

(2) $(x-1)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转一周；

(3) $xy=a, x=a, x=2a, y=0$ 分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转一周。

3. 已知曲线 $\Gamma: y=1-|x^2-1|$，试求：

(1) Γ 与 x 轴所围成的图形 D 的面积；

(2) 图形 D 绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积；

(3) 图形 D 绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积。

4. 求曲线 $r=3\cos\theta$ 和 $r=1+\cos\theta$ 所围成的公共图形的面积。

5. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积和弧长。

6. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的全长、曲线围成区域的面积和绕坐标轴旋转体的体积。

*7. 设容器由 $y=2\sqrt{x}$ 绕 y 轴旋转而成。令注入 V 方水后，水面的高度是 h，再注入 V 方水后，问水面高度提高了多少？

*8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的曲率。

*5.3 微元法在物理上的应用

解决实际问题的基本方法：**微元法**或称**元素法**，即分割、计算微元的近似值、求和、取极限。

从理论来说，分割是将所求量分成 n 个微元，然后求出第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个微元的近似值，求和，取极限($n\to\infty$)，根据极限形式将其表示成定积分。然而在实际问题中，我们只需确定定积分的被积表达式即可，没有必要严格按照分割、计算微元的近似值、求和、取极限，根据极限确定定积分。

定积分的被积表达式就是微元的近似值。在微元近似值的表示上，往往采用：

建立适当的坐标系或坐标轴，整体量分布在 $[a,b]$ 上，在 $[a,b]$ 内任意选取一点 x，以及 $x+dx$，在 x 到 $x+dx$ 微元上，**把变量 $f(x)$**（如压强、力、密度）**看作常量**，从而得到微元的近似值，即定积分的被积表达式，从而确定所求量的定积分。

题型 11　计算液体压力

设有一块曲边梯形平面薄板，曲边的曲线方程为 $y=f(x)$，将其垂直的放在密度为 μ 的

液体中,如图 5-9 所示,则液体对薄板的侧压力 $P=\int_a^b g\mu x f(x)\mathrm{d}x$。

推导过程:用微元法推导液体对薄板的侧面的压力公式。

建立坐标系,如图 5-9 所示,水平方向为 y 轴,垂直向下方向为 x 轴。在薄板$[a,b]$内任意选取一点 x(水深),薄板条的宽度为 $\mathrm{d}x$,薄板条的长度为 $f(x)$,于是薄板条的面积近似等于 $f(x)\mathrm{d}x$,此薄板条所受压力 $g\mu x f(x)\mathrm{d}x$,即是定积分的被积表达式,于是液体对薄板的压力为

$$P=\int_a^b g\mu x f(x)\mathrm{d}x。$$

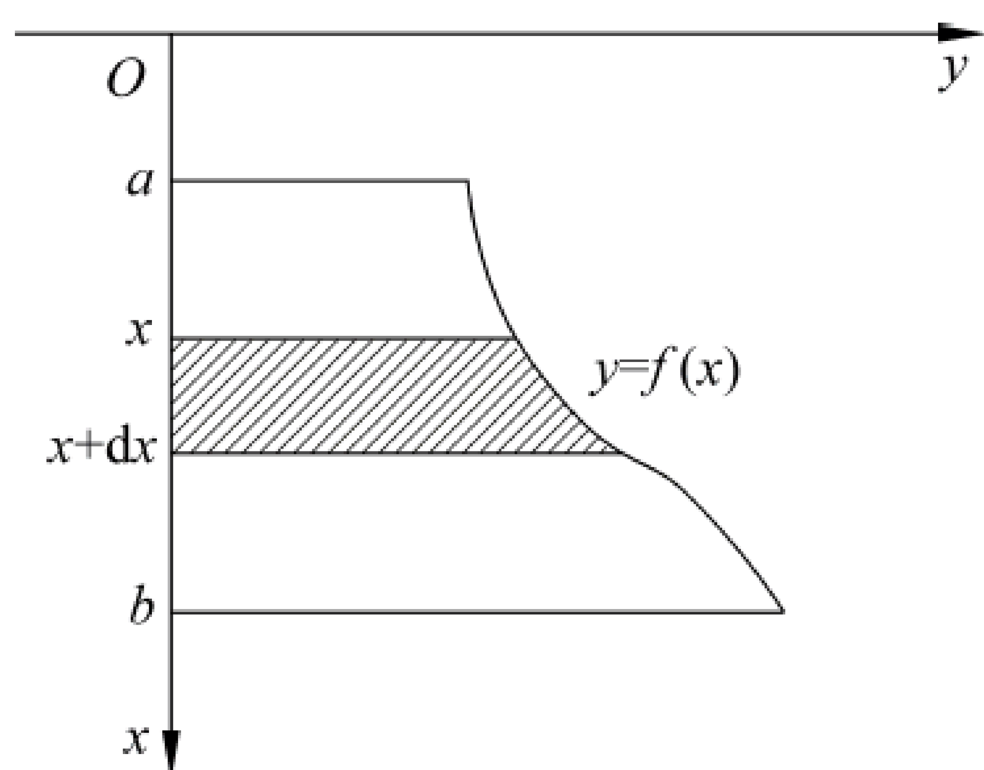


图 5-9

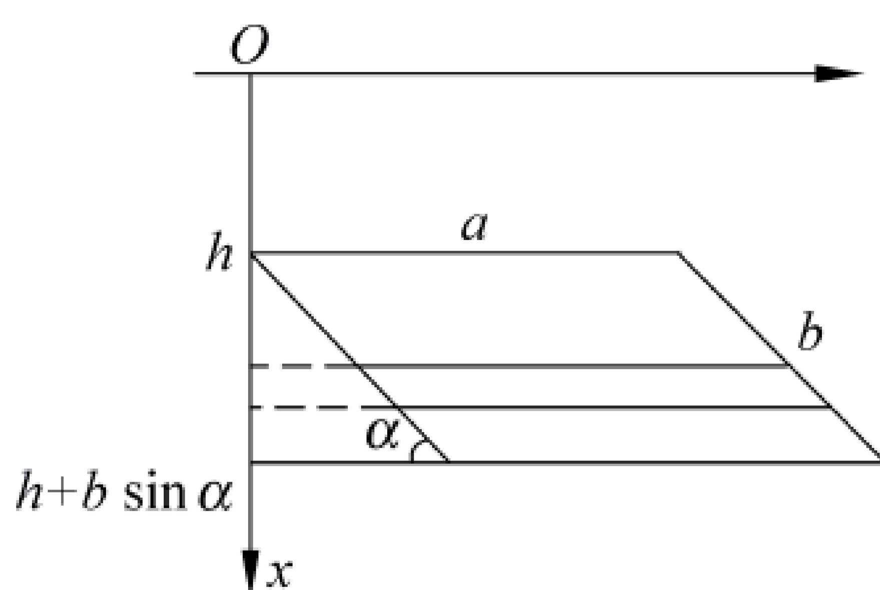


图 5-10

例 5.17 长为 a 宽为 b 矩形薄板($a>b$),放于与液面成 α 角的液体内,长边平行于液面位于深 h 处,如图 5-10 所示。设液体的比重为 σ,求薄板所受的压力 P。

解 在 h 到 $h+b\sin\alpha$ 范围上任意选取一点 x,垂直宽度为 $\mathrm{d}x$ 时,则对应薄板的宽度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$,薄板条的面积为 $a\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$,压力微元为

$$\mathrm{d}P=g\sigma\cdot x\cdot\frac{a\mathrm{d}x}{\sin\alpha}=\frac{g\sigma xa}{\sin\alpha}\mathrm{d}x,$$

所以有

$$P=\int_h^{h+b\sin\alpha}\mathrm{d}P=\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{g\sigma xa}{\sin\alpha}\mathrm{d}x=ab\sigma g\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)。$$

例 5.18 闸门的上部分为矩形,下部分为二次抛物线,如图 5-11(a)所示。当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分所承受的水压力与闸门下部分承受的水压力之比为 5∶4,求闸门的矩形的高度应是多少米?

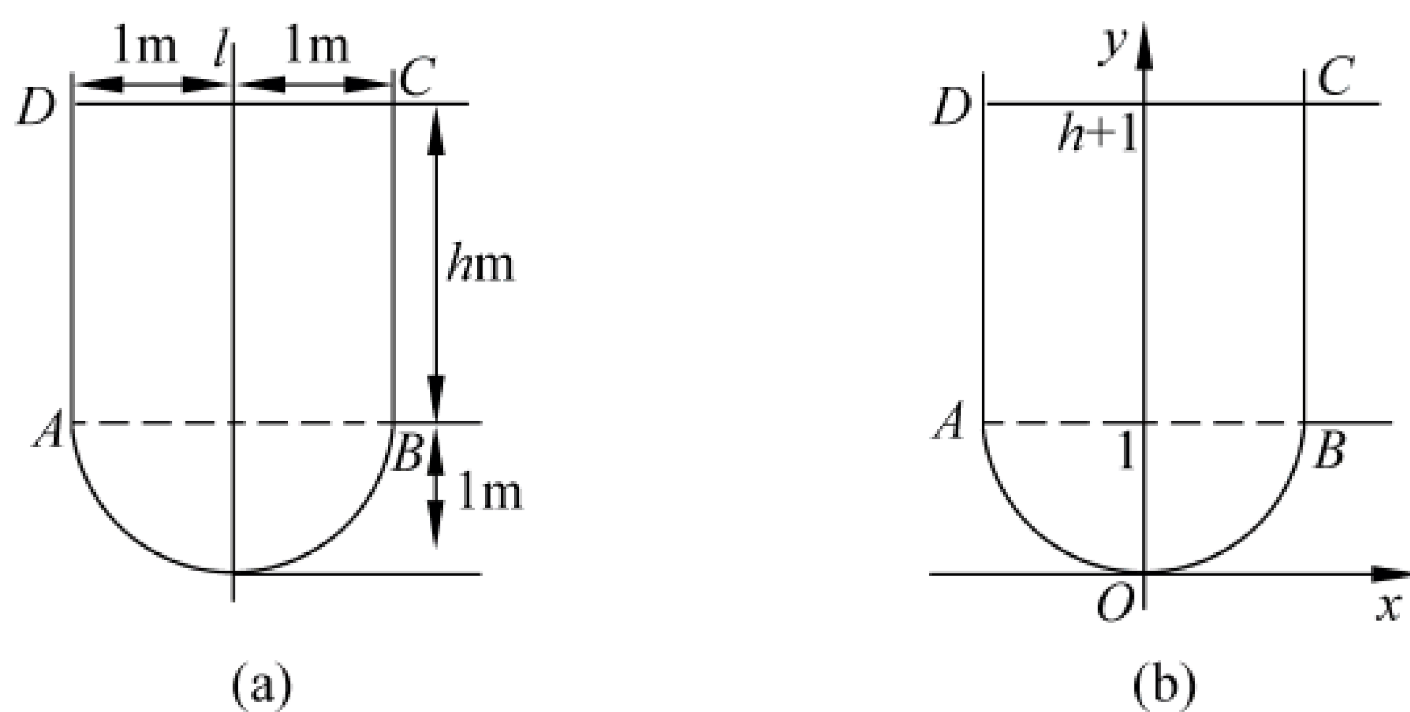


图 5-11

解 建立坐标系,如图 5-11(b)所示,则抛物线方程为 $y=x^2$。设闸门矩形高度为 h,矩

形部分承受的水压力为

$$P_1 = 2\int_1^{h+1} \rho g(h+1-y)\mathrm{d}y = \rho g h^2;$$

闸门抛物线部分承受的水压力为

$$P_2 = 2\int_0^1 \rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y = \rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right),$$

根据$\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4}$,得到 $h=2$。

题型 12 计算物体之间的引力

质量为 M,长度为 l 的均匀细棒,对物体一端距离为 a,质量为 m 的质点的引力为

$$F = \int_0^l G\frac{Mm}{l(l+a-x)^2}\mathrm{d}x,$$

其中 G 万有引力常数。

推导过程:用微元法推导物体对质点的引力公式。

设细棒和质点在一条直线上,取远离质点的一端作为数轴的原点,如图 5-12 所示,在细棒的$[0,l]$内任取一点,它到原点的距离为 x,并取物体的一段长度为 $\mathrm{d}x$,于是这段物体质量为$\frac{M}{l}\mathrm{d}x$,因此这段物体对质点的引力微元

$$\mathrm{d}F=-G\frac{m\frac{M}{l}\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2},$$

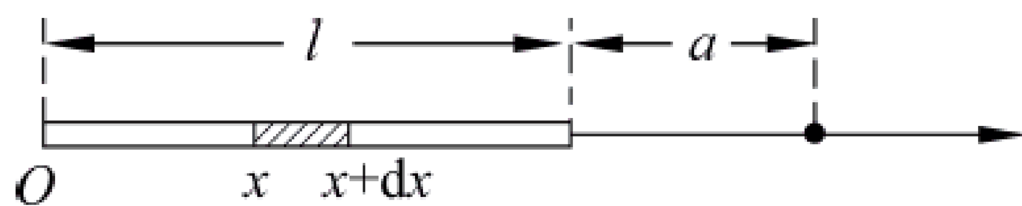


图 5-12

所以引力为 $F=-\int_0^l G\frac{Mm}{l(l+a-x)^2}\mathrm{d}x$。

当然,建立数轴还有其他方法,但结果是一样的。对物体和质点不在一直线的情况,其原理是相同的。

例 5.19 设有质量均匀的细直杆 AB,其长为 l,质量为 M。

(1) 在 AB 的延长线上与端点 B 的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_1,求细直杆对质点 N_1 的引力;

(2) AB 的中垂线上到杆的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_2,求细直杆对质点 N_2 的引力。

解 (1) 建立数轴,如图 5-13(a)所示,在$[x,x+\mathrm{d}x]$内的一段质量为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$,所以此段对质点 N_1 的引力微元为 $\mathrm{d}F=-G\frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x\cdot m}{(l+a-x)^2}$,所以

$$F=-\int_0^l G\frac{\frac{M}{l}\cdot m}{(l+a-x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{GMm}{a(l+a)}。$$

(2) 建立坐标系,如图 5-13(b)所示,在$[x,x+\mathrm{d}x]$内的一段质量为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$,所以此段对质点 N_2 的引力的垂直向下分力 F_y 的微元为

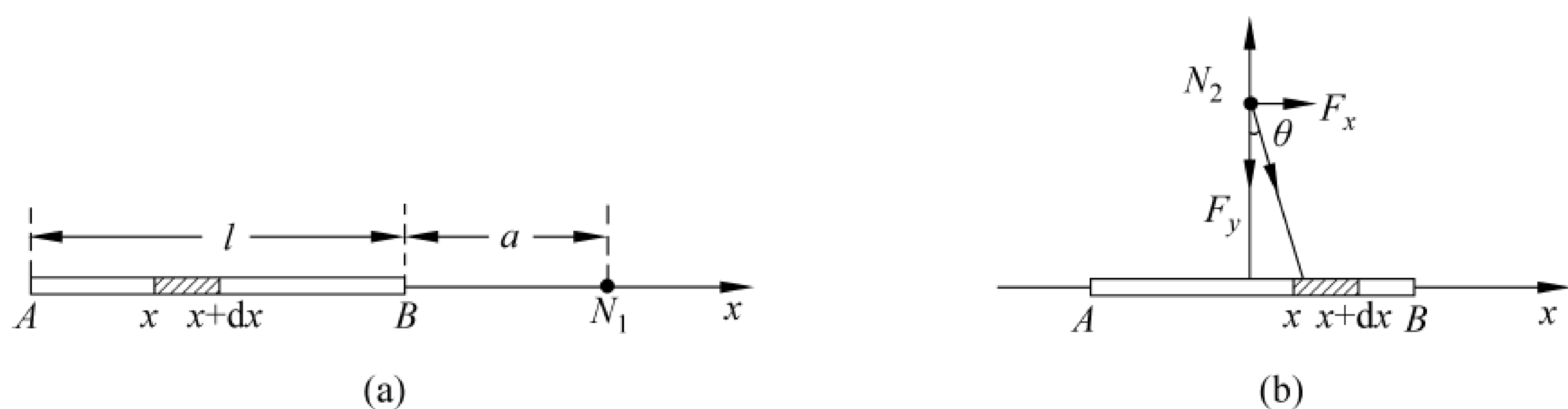


图 5-13

$$\mathrm{d}F_y=-G\frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x\cdot m}{(a^2+x^2)}\cos\theta=-G\frac{Ma}{l}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

所以

$$F_y=-2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{GMma}{l}\frac{1}{(a^2+x)^{3/2}}\mathrm{d}x=-\frac{2GMm}{a\sqrt{(l^2+4a^2)}}。$$

由对称性,引力的水平分力 $F_x=0$。

题型 13 计算变力做功

设一物体,在外力 $F(x)$的作用下,沿 x 轴从 a 点移动到 b 点所做的功为 W,则

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x。$$

推导过程:用微元法推导上述变力做功公式:

如图 5-14 所示,在$[a,b]$内任意选取一个位置 x,移动距离为 $\mathrm{d}x$,在力 $F(x)$作用下,物体从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 所做的功为 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$,即是定积分的被积表达式,于是变力做功的公式为 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$。

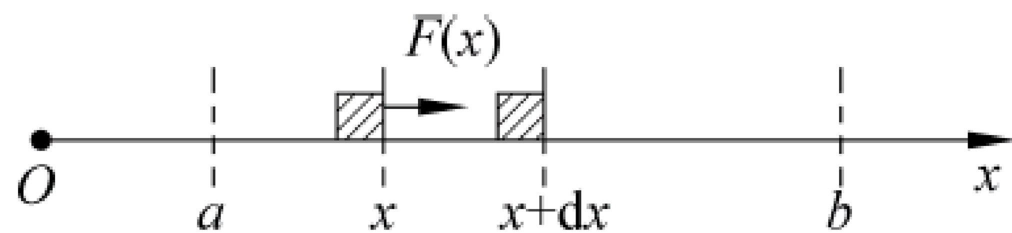


图 5-14

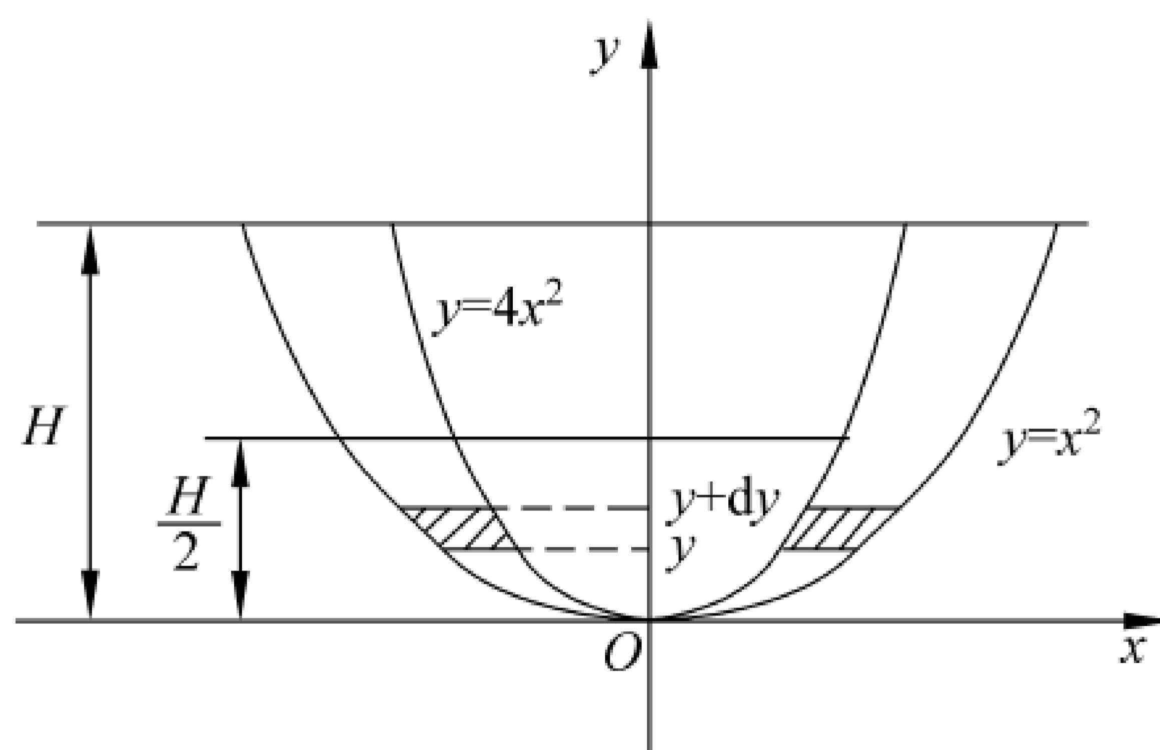


图 5-15

例 5.20 由抛物线 $y=x^2$ 及 $y=4x^2$ 绕 y 轴旋转一周构成一旋转抛物面的容器,高为 H,现于其中盛水,水高为 $H/2$,问要将水全部抽出,外力需做多少功?

解 如图 5-15 所示,设水的密度为 μ,在水位范围上任取一点 y,厚度 $\mathrm{d}y$,于是环形水面片的重力为

$$\pi\left(y-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}y\cdot\mu g=\frac{3}{4}\pi\mu g y\,\mathrm{d}y。$$

抽出这部分水需要做的功近似等于

$$dW = \frac{3}{4}\pi\mu g y(H-y)dy,$$

所以抽出全部分水所做的功

$$W = \frac{3}{4}\pi\mu g\int_0^{H/2} y(H-y)dy = \frac{1}{16}\pi\mu g H^3。$$

例 5.21 为清除井底的污染，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口。井深30m，抓斗自重400N，缆绳每米重50N，抓斗抓起污泥重2000N，提升速度3m/s，在提升过程中，污泥以20N/s的速度从抓斗中漏出，现将抓斗提升到井口，问克服重力需要做多少功？

解 将抓斗提升到井口，克服重力做的功分三部分：W_1，W_2 和 W_3，如图5-16所示。

W_1 是克服抓斗自重做功，它在整个运动过程中，所用的力是常量，即抓斗的重量，所以

$$W_1 = 400\times 30 = 12000(\mathrm{J})。$$

W_2 是克服缆绳自重做功，显然它在整个运动过程中，所用的力是变力，当抓斗处在 x 位置时，缆绳重量 $50(30-x)$；从 x 运动到 $x+dx$ 克服缆绳重量所做的功为 $50(30-x)dx$，于是

$$W_2 = \int_0^{30} 50(30-x)dx = 22500(\mathrm{J})。$$

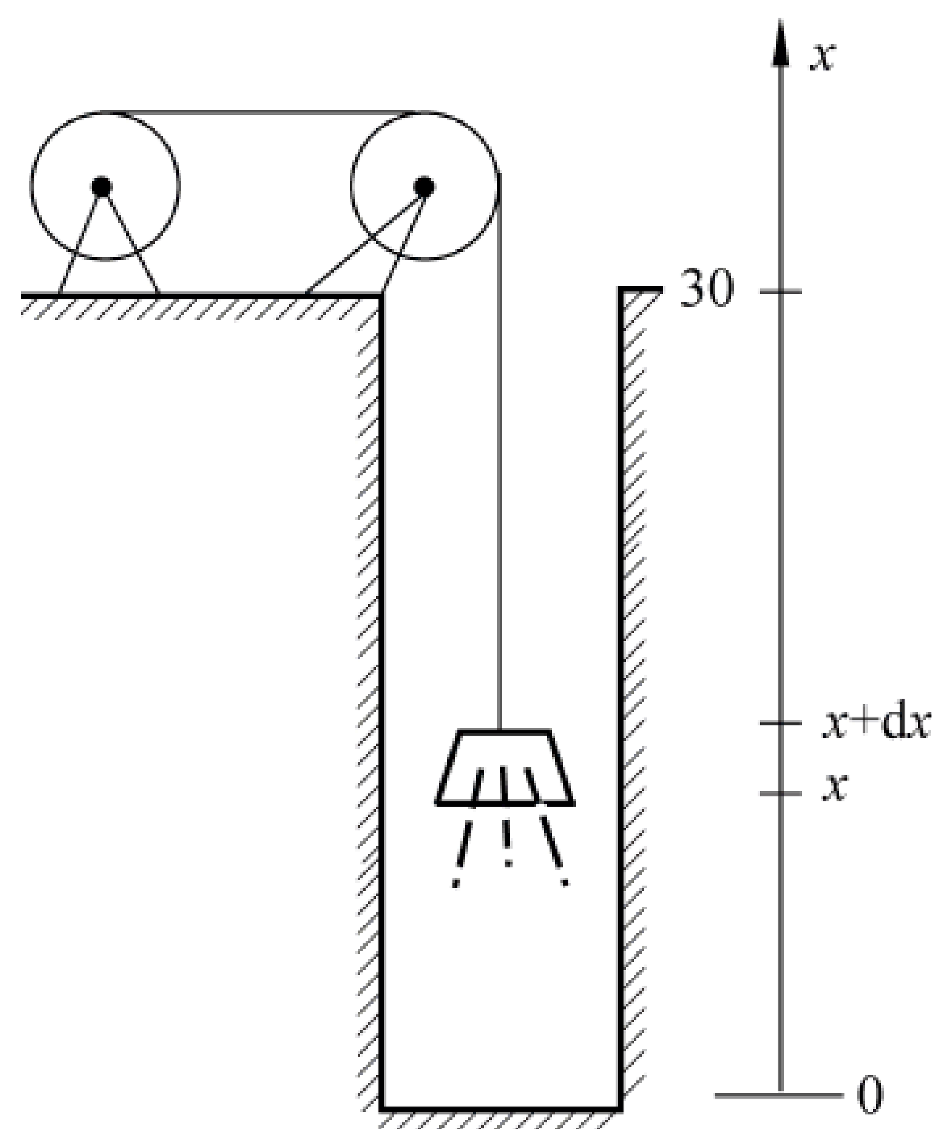


图 5-16

W_3 是提升污泥所做的功，它在整个运动过程中，所用的力是变力，当抓斗处在 x 位置时，污泥的重量是 $2000-20\cdot\frac{x}{3}$，于是从 x 运动到 $x+dx$ 克服污泥重量所做的功为 $\left(2000-20\cdot\frac{x}{3}\right)dx$，于是

$$W_3 = \int_0^{30}\left(2000-20\cdot\frac{x}{3}\right)dx = 57000(\mathrm{J})。$$

所以

$$W = W_1+W_2+W_3 = 12000+22500+57000 = 91500(\mathrm{J})。$$

题型14 计算物体的质量

设一物体形状如图5-2(b)所示，其密度函数 $\mu(x)$ 是连续函数，截面面积为 $S(x)$，则物体质量为

$$M = \int_a^b \mu(x)S(x)dx。$$

推导过程：在 $[a,b]$ 内任意选取一个位置 x，作一个截面 $S(x)$，在这个截面上密度相等，给出切片的厚度为 dx，于是微元体积为 $S(x)dx$，微元质量近似等于 $\mu(x)S(x)dx$，即是定积分的被积表达式。于是物体质量为 $M=\int_a^b \mu(x)S(x)dx$。

例 5.22 设半径为 R 的球体密度为 $u=r^2$，求球体的质量：

(1) r 是球内的任意一点到球心的距离；

(2) r 是球内的任意一点到一直径的距离；

(3) r 是球内的任意一点到过球心的一平面的距离。

解 (1) 以球心为原点建立坐标轴。由于 r 表示球内的点到球心的距离，所以将密度相等部分分割到一起，分割方法是：以原点为球心，以 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 为半径作两个球面组成球壳，图 5-17(a)所示，所以球壳体积微元为

$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r(\text{体积}\approx\text{球面面积 }4\pi r^2\times\text{厚度 }\mathrm{d}r)$$

于是质量微元

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}V\cdot r^2=4\pi r^2\cdot\mathrm{d}x\cdot r^2=4\pi r^4\mathrm{d}r,$$

所以质量为 $M=\int_0^R 4\pi r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi R^5$。

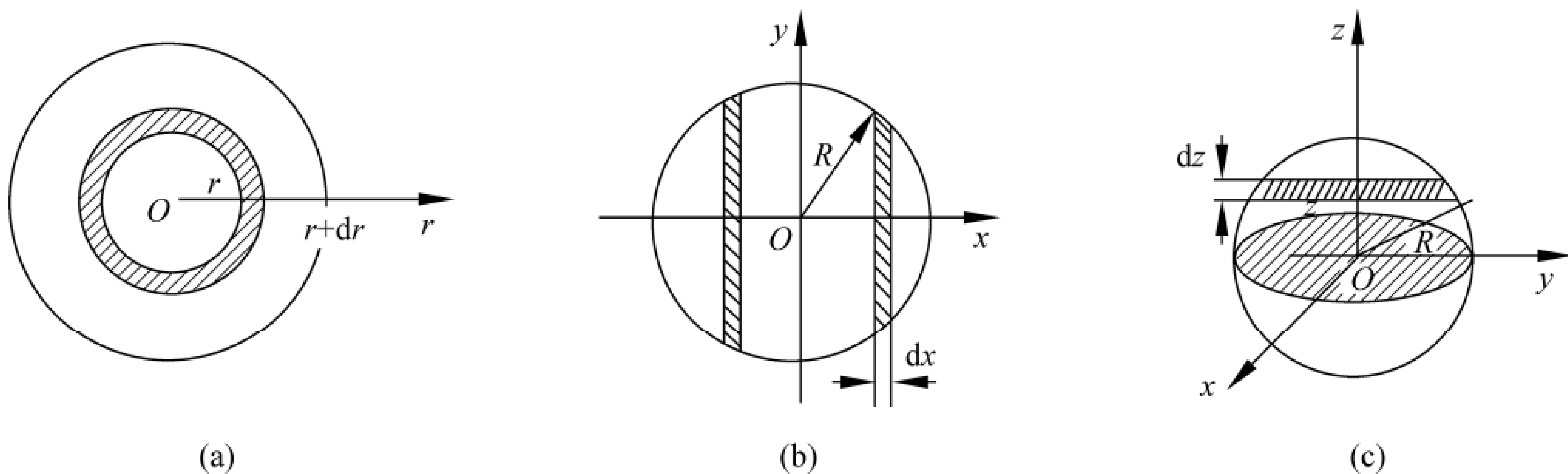


图 5-17

(2) 选球心为原点，该直径为 y 轴，建立平面直角坐标系。由于 r 表示球内的点到直径的距离，即到 y 轴的距离，所以应将密度相等的部分分割到一起，分割方法是：以 y 轴为中心，以 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 为半径作两个圆柱面，组成具有厚度为 $\mathrm{d}x$ 的柱面，如图 5-17(b)所示，于是体积微元为

$$\mathrm{d}V=2\pi x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x(\text{体积}\approx\text{柱面表面积 }2\pi x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\times\text{厚度 }\mathrm{d}x)$$

于是质量微元

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}V\cdot x^2=2\pi x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\mathrm{d}x\cdot x^2=4\pi x^3\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

所以质量为

$$M=\int_0^R 4\pi x^3\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\pi R^5\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{8}{15}\pi R^3。$$

(3) 选球心为原点，过球心的平面为 xOy 面，建立空间直角坐标系。由于 r 表示球内的点到过球心的一平面的距离，即到 xOy 面的距离，所以应将密度相等的部分分割到一起，分割方法是：距 xOy 平面的距离为 z 和 $z+\mathrm{d}z$，作两平行于 xOy 面的二平面，截面是圆面，厚度为 $\mathrm{d}z$，图 5-17(c)所示，于是体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2\mathrm{d}z(\text{体积}\approx\text{圆面面积 }\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2\times\text{厚度 }\mathrm{d}z)$$

于是质量微元

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}V\cdot z^2=\pi z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z,$$

所以质量为 $M=2\int_0^R \pi z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi R^5$。

微元法解决物理问题方法综述

物理中的四类问题：变力做功、液体压强、引力、物体的质量是可以用微元法解决的。微元法计算变力做功、液体压强、引力、物体的质量的具体步骤如下：

(1) 适当地建立坐标轴，或平面直角坐标系，或空间直角坐标系，建立的方法不是唯一的，但要有利于计算微元。

(2) 分割。在整体量中取出一个极小单元（微元），怎样取就是分割问题，也是微元法的重点和关键。从分割的形状看，一般是条、片、环、壳等，将具有相同量分割在一起，其中条、片、环、壳的宽度或厚度，是自变量的微分 dx。在 x 到 $x+dx$ 范围上，将变量看成常量，从而得到微元的值。

(3) 微元就是定积分的被积函数表达式，整体量就是微元在自变量 x 变化范围上的定积分。

练习题 5-3

1. 设体积为 1 的立方体，密度为 $\mu(\mu>1)$，沉入深为 $H(H>1)$ 的水池底部，现将其从水中取出，需要做多少功？

2. 有半径为 Rm、长为 Lm 的均匀圆柱体，平放在深度为 $2R$m 的水池中（圆柱体的侧面与水面相切），设圆柱的密度的是水密度的 2 倍，现将圆柱体平移出水面，需做多少功？

3. 半径为 1 的半球形水池，充满水，要把池内水全部取出，需做多少功？

4. 灌溉涵洞的断面为抛物线拱形，在水面高出涵洞顶点为 1m 时，求涵洞闸门（底边宽为 2m，高 1m）所受的水压力（水的比重为 1）。

5. 一物体以速度 $v=3t^2+3t$m/s 作直线运动，计算该物体在 $t=0$ 时到 $t=10$s 内的平均速度。

6. 洒水车的水箱是一个横放着的椭圆桶，其椭圆的长短半径分别为 b 和 a，求水箱顶头面所受的侧压力。

7. 设有半径为 a，面密度为 σ 的均匀圆板，质量为 m 的质点位于通过圆板中心 O 且垂直于圆板的直线上，到圆板的距离为 b，求圆板对质点的引力。

5.4 微积分在经济中的应用

一、基本概念

定义 9 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数**，$f'(x_0)$ 为**边际函数值**，即当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位。

定义 10 设总成本函数 $C_T=C_T(Q)$，Q 为产量，则生产第 Q 个单位产品时的**边际成本函数**为 $C_M=\dfrac{dC_T(Q)}{dQ}$。

注 边际成本表示生产第 Q 个或 $Q+1$ 产品所需用的成本。

定义 11 设总收益函数 $R_T=PQ$，P 是价格，Q 是销售量，又设需求函数 $P=P(Q)$，则

总收益函数为 $R_T=QP(Q)$，于是平均收益 $R_A=\frac{R_T}{Q}=P(Q)$，**边际收益函数**为

$$R_M=\frac{\mathrm{d}R_T(Q)}{\mathrm{d}Q}=P(Q)+QP'(Q)。$$

注 边际收益表示当销售第 Q 个单位时，多销售一个产品或少销售一个单位产品使其增加或减少的收益。

定义 12 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，函数的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$$

与自变量的相对变量 $\frac{\Delta x}{x}$ 之比 $\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}$ 称为函数 $y=f(x)$ 从 x 到 $x+\Delta x$ 两点间的弹性，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}$ 的极限称为 $y=f(x)$ 在 x 处的**弹性**，记为 $\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}$，即

$$\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=y'\cdot\frac{x}{y},$$

称 $\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}$ 为**弹性函数**。

注 弹性表示当 x 相对改变 1%时，$f(x)$ 改变的百分数，即反映了由 x 变化引起 $f(x)$ 变化反应的强烈程度。

规定：需求价格弹性为 $E_D=-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{D}$，其中 D 是需求量，P 是价格。

题型 15 计算成本、收益、利润、弹性以及边际、平均成本、收益、利润

例 5.23 若某商品的需求函数 $P=\frac{100}{\sqrt{Q}}$，其中 P 是商品价格，Q 为商品需求量，该商品的成本函数为 $C=400+3Q+\frac{1}{4}Q^2$，试求平均成本的最小值，并求边际成本和边际利润。

解 平均成本 $\bar{C}=\frac{C}{Q}=400\,\frac{1}{Q}+3+\frac{1}{4}Q$，则 $\frac{\mathrm{d}\bar{C}}{\mathrm{d}Q}=-400\,\frac{1}{Q^2}+\frac{1}{4}$。令 $\frac{\mathrm{d}\bar{C}}{\mathrm{d}Q}=0$，解得 $Q=40$。由于 $\frac{\mathrm{d}^2\bar{C}}{\mathrm{d}Q^2}=\frac{800}{Q^3}$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2\bar{C}}{\mathrm{d}Q^2}\Big|_{Q=40}>0$，故当 $Q=40$ 时，$\bar{C}$ 取得极小值。

由于函数只有一个驻点，所以在 $Q=40$ 时，函数有最小值 $\bar{C}|_{Q=40}=23$。

边际成本为 $C'=3+\frac{1}{2}Q$。

设利润函数为 $L(Q)$，收益为 $R(Q)$，则

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)=PQ-400-3Q-\frac{1}{4}Q^2\\&=\frac{100}{\sqrt{Q}}Q-400-3Q-\frac{1}{4}Q^2=100\sqrt{Q}-400-3Q-\frac{1}{4}Q^2。\end{aligned}$$

边际利润为 $L'(Q)=\frac{50}{\sqrt{Q}}-3-\frac{1}{4}Q$。

例 5.24 一商家销售某种商品的价格满足关系 $P=7-0.2x$(万元/t)，x 是销售量(单位：t)，商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元)。

(1) 若每销售一吨商品,政府要征税 t(万元),试求该商家获得最大利润时的销售量;

(2) t 为何值时,政府征税总额最大。

解 (1) 设 T 为总税额,则 $T=tx$,商品销售的总收入为

$$R=Px=(7-0.2x)x=7x-0.2x^2,$$

利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)-T(x)=7x-0.2x^2-3x-1=-0.2x^2+(4-t)x-1。$$

令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=0$,即 $-0.4x+4-t=0$,得到 $x=\frac{4-t}{0.4}=\frac{5}{2}(4-t)$。由于 $\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}=-0.4<0$,所以 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 为利润最大时的销售量。

(2) 将 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$,得到 $T=t\cdot\frac{5}{2}(4-t)=10t-\frac{5}{2}t^2$。由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=10-5t=0$,得到唯一的驻点 $t=2$。由于 $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=-5<0$,所以当 $t=2$ 时,T 有极大值,也是最大值,此时政府税收总额最大。

例 5.25 已知某产品从投产之日起到 t 日止的累积产量为 $\theta(t)$(单位:t),设边际产量为 $\theta'(t)=225t^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}$。

(1) 求从投产之日起到 t 日止的累积产量为 $\theta(t)$;

(2) 求投产后多少天,平均日产量最大,最大值是多少;

(3) 达到最大值后再生产同样的天数,后面这许多天的平均日产量是多少。

解 (1) $\theta(t)=\theta(0)+\int_0^t\theta'(t)\mathrm{d}t$,由于 $\theta(0)=0$,所以

$$\theta(t)=\int_0^t 225t^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}\mathrm{d}t=15\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}\mathrm{d}\left(-\frac{15}{t}\right)=15\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}\Big|_0^t=15\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}(\mathrm{t})。$$

(2) 平均日产量为

$$\bar{\theta}(t)=\frac{\theta(t)}{t}=15\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}t^{-1},\quad t>0。$$

为求它的最大值,求导函数,并令其等于零,$\bar{\theta}'(t)=15\mathrm{e}^{-\frac{15}{t}}t^{-3}(15-t)=0$,解得 $t=15$。当 $0<t<15$ 时,$\bar{\theta}'(t)>0$,当 $t>15$ 时,$\bar{\theta}'(t)<0$,所以 $t=15$ 是 $\bar{\theta}(t)$ 的极大值点,也是 $\bar{\theta}(t)$ 的最大值点,于是 $\max\bar{\theta}(t)=\bar{\theta}(15)=\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{t})$。

(3) 再生产同样天数,即再生产 15 天,年均日产量为

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30}\theta'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{15}\theta(t)\Big|_{15}^{30}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{t})。$$

例 5.26 某水泥厂每日生产 x(百吨)水泥的总成本的变化率为 $C'(x)=2+\frac{x}{16}$(万元/百吨),总收益的变化率为 $R'(x)=14-\frac{x}{4}$(万元/百吨),固定成本 1 万元,试求总利润函数及最低利润。

解 成本函数 $C(x)=\int_0^x\left(2+\frac{x}{16}\right)\mathrm{d}x+1=2x+\frac{x^2}{32}+1$,收益函数为

$$R(x)=\int_0^x\left(14-\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x=14x-\frac{x^2}{8};$$

所以总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=12x-\frac{5}{32}x^2-1。$$

由

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)=\left(14-\frac{x}{4}\right)-\left(2+\frac{x}{16}\right)=12-\frac{5}{16}x=0,$$

解得 $x=38.4$。因 $L''(x)=-\frac{5}{16}<0$,故当日产量为 38.4(百吨)时,总利润最大为

$$L(38.4)=229.4(万元)。$$

例 5.27 某商品的销售量 $Q(\mathrm{t})$是价格 p(万元/t)的函数 $Q=\frac{100}{p+1}-1$。

(1) 价格是多少时,总收入最大?

(2) 在总收入最大时,求总收入相对价格的弹性及需求相对于价格的弹性。

解 (1) 依题意,总收入函数 $R(p)=pQ=\frac{99p-p^2}{p+1}$,$0<p<99$。令

$$R'(p)=\frac{-p^2-2p+99}{(p+1)^2}=0,$$

解得 $p=9$,$p=-11$(舍去)。又由于 $R(0)=0$,$R(99)=0$,所以 $p=9$ 是最大值点,即价格为 9 时,总收入最大。

(2) 当 $p=9$ 时,总收入相对于价格的弹性为 $\left.\frac{\mathrm{E}R}{\mathrm{E}p}\right|_{p=9}=\frac{p}{R}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{p=9}=0$;总需求相对于价格的弹性为

$$\left.\frac{\mathrm{E}Q}{\mathrm{E}p}\right|_{p=9}=\frac{p}{Q}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|_{p=9}=\frac{p(p+1)}{99-p}\cdot-\left.\frac{100}{(p+1)^2}\right|_{p=9}=-1。$$

例 5.28 某商品的需求函数为 $Q=Q(P)$,收益函数 $R=PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为销售量(产品的产量),$Q(P)$是单调减函数,如果价格为 P_0,对应的产量为 Q_0,边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$,收益对价格的边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=c>0$,需求价格的弹性为 $E_d=b>0$,求 P_0 与 Q_0。

解 由于 $R=PQ$,对 Q 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\cdot\frac{Q}{P}\cdot P=P\left(1-\frac{1}{E_d}\right),$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=P_0\left(1-\frac{1}{b}\right),$$

解得 $P_0=\frac{ab}{b-1}$。同样由 $R=PQ$,对 P 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{Q}\cdot Q=Q(1-E_d),$$

于是 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=Q_0(1-b)=c$,所以 $Q_0=\frac{c}{1-b}$。

例 5.29 某市饮食业欲增加饮食网点,已知其经营费用增加率为 $C'(x)=1+\frac{1}{2}x$(万

元)，收益的增加率为 $R'(x)=\frac{16}{9}\sqrt{x}$(万元)，其中 x 表示饮食店增加的个数，为使增设网点后增加总利润最大，全市应增加多少个网点店？增加的总利润是多少？

解 总利润 $L(x)=R(x)-C(x)$，则 $L'(x)=R'(x)-C'(x)=\frac{16}{9}\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}x$，于是

$$L(x)=\int_0^x\left(\frac{16}{9}\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x。$$

令 $L'(x)=0$，即 $\frac{16}{9}\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}x=0$，解得 $x_1=\frac{1}{9}$，$x_2=36$。由于

$$L(36)=\int_0^{36}\left(\frac{16}{9}\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=96,$$

$$L\left(\frac{1}{9}\right)=\int_0^{\frac{1}{9}}\left(\frac{16}{9}\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=-\frac{35}{972}<0,$$

所以增加36个饮食店时，增加的总利润最大，增加的最大利润是96万元。

练习题 5-4

1. 设某种商品的单价为 P 时，售出的商品量 Q 可表示为 $Q=\frac{a}{P+b}-c$，其中 a,b,c 都是正数，且 $a>bc$。

(1) 求 P 在什么范围内变化，相应的收入(销售额)增大或减少？

(2) 要使销售额最大，单价 P 应取何值？最大销售额是多少？

2. 设某产品的成本函数为 $C=ap^2+bp+c$，需求函数 $p=\frac{1}{e}(d-q)$，其中 q 为单价，a，b,c,d,e 为大于零的常数，且 $d>b$，求：(1)需求对价格弹性的绝对值为1的产量；(2)最大利润；(3)需求对价格的弹性。

3. 已知某企业的总收益函数 $R(x)=26x-2x^2-4x^3$，总成本函数 $C(x)=8x+x^2$，其中 x 表示产品产量。求利润函数、边际收益函数、边际成本函数，以及企业获得最大利润时的产量和最大利润。

4. 生产某产品的固定成本为10，而当产品为 x 时的边际成本函数为 $C'(x)=40-20x+3x^2$，边际收益为 $R'(x)=32-10x$，其中 x 表示产品产量。求(1)总利润函数；(2)使总利润最大的产量。

5. 某商店进货两种商品共计400件，商品 A 的需求量为 Q_A，价格为 P_A 的函数为 $Q_A=8000-40P_A$，商品 B 的需求量为 Q_B，价格为 P_B 的函数为 $Q_B=500-50P_B$，该两种商品的销售成本分别为 $C_A=1000-5Q_A$，$C_B=120+3Q_B$，假设所进货能够全部售出，问如何确定商品 A，B 的定价，才能使商品获得最大利润。

6. 已知某类商品对价格 p 的需求弹性是3，对供给弹性是2，且当 $p=1$ 时，社会对商品的需求量和供给量分别是 D_0，S_0。

(1) 给出该商品在供求平衡时的平衡价格；

(2) 若价格是时间 t 的函数，且价格的变化率与超额需求量 $D-S$ 成正比，与价格 p 成反比，求价格对 t 的函数；已知 $p_0=p(0)$；

(3) 当 $t\to+\infty$ 时，求 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$。

5.5 一元函数微积分的应用考研真题

一、一元函数微积分的应用考研数一真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于一元函数微积分应用的考研数一真题共出了19道题，题型分布在：

1. 求渐近线的方程：共有4个题，分布在2005年，2007年，2012年和2014年。

2. 根据导函数图形确定函数的极值点：有1个题，分布在2003年。

3. 求函数的单调区间、极值和拐点：共有7个题，分布在2010年，2011年，2014年，2015年，2017年和2019年(2题)。

4. 求曲线的切线方程：共有2个题，分布在2004年和2008年。

5. 利用函数性质计算：有1个题，分布在2005年。

6. 微积分在几何方面的应用：共有3个题，分布在2003年，2011年和2012年。

7. 微积分在物理方面的应用：有1个题，分布在2017年。

1 一元函数微积分的应用考研数一真题题型分析

1. 求渐近线方程：2005年考了求曲线斜渐近线的方程；2007年和2012年考了求曲线渐近线的条数；2014年考了求曲线渐近线的方程。

2. 根据导函数图形确定函数的极值点：2003年考了根据导函数图像确定极值点。

3. 求函数的单调区间、极值和拐点：2010年考了求变限积分函数的单调区间与极值；2011年考了求曲线的拐点；2014年考了求由方程确定的隐函数的极值；2015年考了根据导函数的图形确定极值点和拐点的个数；2017年考了隐函数的极值；2019年考了判断分段点是否是极值点和凸凹区间与拐点。

4. 求曲线的切线方程：2004年考了求垂直某直线的切线方程；2008年考了由方程给出的曲线在一点的切线方程。

5. 利用函数性质计算：2005年考了利用切点、拐点性质，用分部积分法计算定积分。

6. 微积分在几何方面的应用：2003年考了计算平面图形的面积与旋转体的体积；2011年考了求曲线的弧长；2012年考了求平面图形的面积。

7. 微积分在物理方面的应用：2017年考了根据路程，求时间。

2 一元函数微积分的应用考研数一真题

1. (2003，二(1)(4分))设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数图像如图5-18所示，则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点；

(B) 两个极小值点和一个极大值点；

(C) 两个极小值点和两个极大值点；

(D) 三个极小值点和一个极大值点。

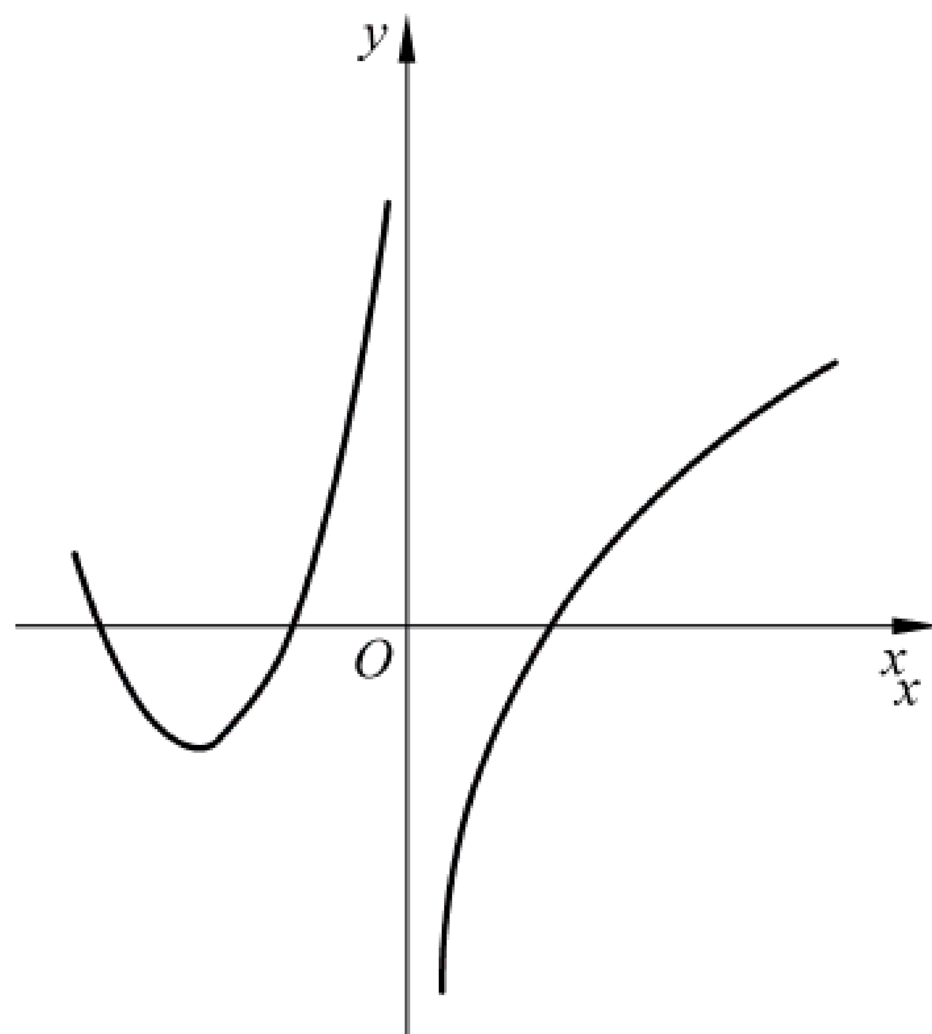


图 5-18

考点与解法：判别极值点。求疑似极值点，根据导函

数的符号，确定极值点以及极大值点和极小值点。

2.（2003，三（10分））过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D。

(i) 求 D 的面积 A；

(ii) 求 D 绕着直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V。

考点与解法：求平面图形的面积和旋转体的体积。(i)求切线方程，求平面图形的面积；(ii)根据旋转体的体积公式计算旋转体的体积。

3.（2004，一(1)(4分)）求曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程。

考点与解法：求切线方程。利用切线与直线 $x+y=1$ 垂直，求切点。

4.（2005，一(1)(4分)）求曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程。

考点与解法：求斜渐近线方程。根据斜渐近线公式，求出切线的斜率和截距。

5.（2005，三(17)(11分)）如图5-19所示，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4)。设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$。

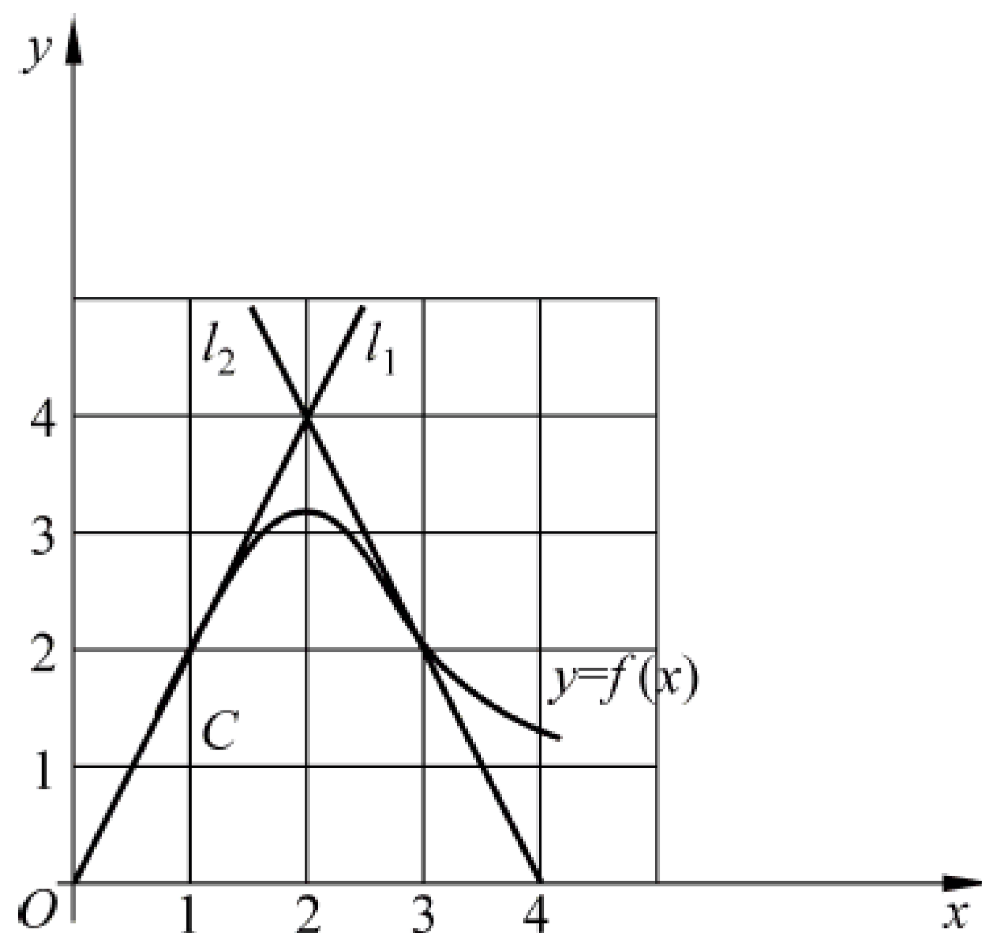


图 5-19

考点与解法：计算定积分。根据切线、拐点和交点分别确定 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，$f(3)$，$f'(3)$，$f''(3)$，用分部积分计算定积分。

6.（2007，一(2)(4分)）求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线条数：

(A) 0； (B) 1；

(C) 2； (D) 3。

考点与解法：求渐近线。求所有渐近线，确定条数。

7.（2008，二(10)(4分)）曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程。

考点与解法：求切线方程。求隐函数的导数，确定切线的斜率。

8.（2010，三(16)(10分)）求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值。

考点与解法：求单调区间和极值。利用求单调区间和极值的方法。

9.（2011，二(9)(4分)）求曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长。

考点与解法：计算曲线弧长。根据曲线弧长公式，计算定积分。

10.（2011，一(1)(4分)）曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是：

(A) (1,0)； (B) (2,0)； (C) (3,0)； (D) (4,0)。

考点与解法：拐点的判定。根据拐点的充分条件，二阶导数等于0，三阶导数不等于0。

11.（2012，一(1)(4分)）求曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 的渐近线条数：

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

考点与解法：求渐近线条数。求所有渐近线，确定条数。

12. （2012，三(18)(10 分)）已知曲线 L：$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求曲线 L 及 x 轴，y 轴为边界的区域的面积。

考点与解法：求函数表达式和平面图形面积。建立方程，解方程，得到函数 $f(t)$ 的表达式。再求平面图形的面积。

13. （2014，一(1)(4 分)）下列曲线有渐近线的是：

(A) $y=x+\sin x$； (B) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$；

(C) $y=x^2+\sin x$； (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$。

考点与解法：求渐近线。求每个曲线的渐近线。

14. （2014，三(16)(10 分)）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值。

考点与解法：求极值。求隐函数的稳定点，并求二阶偏导，判断稳定点是否是极值点，是极大值点还是极小值点，并求极值。

15. （2015，一(1)(4 分)）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图 5-20 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为：

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

考点与解法：求拐点。拐点产生于疑似拐点，如果疑似拐点的左右的二阶导数符合不同，则是拐点。

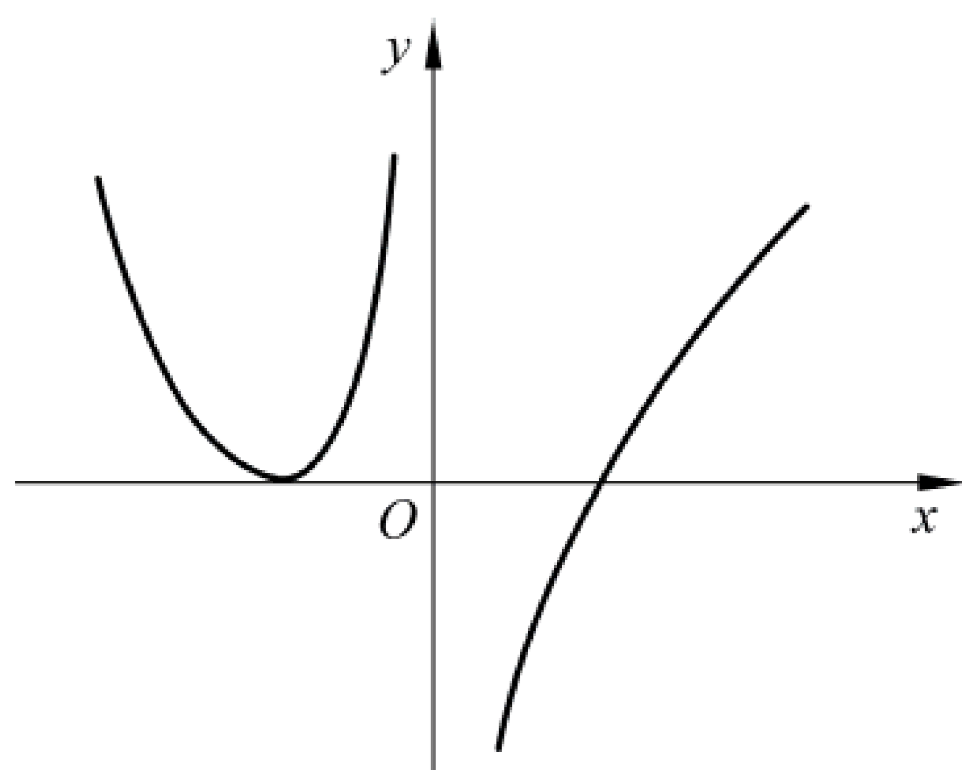


图 5-20

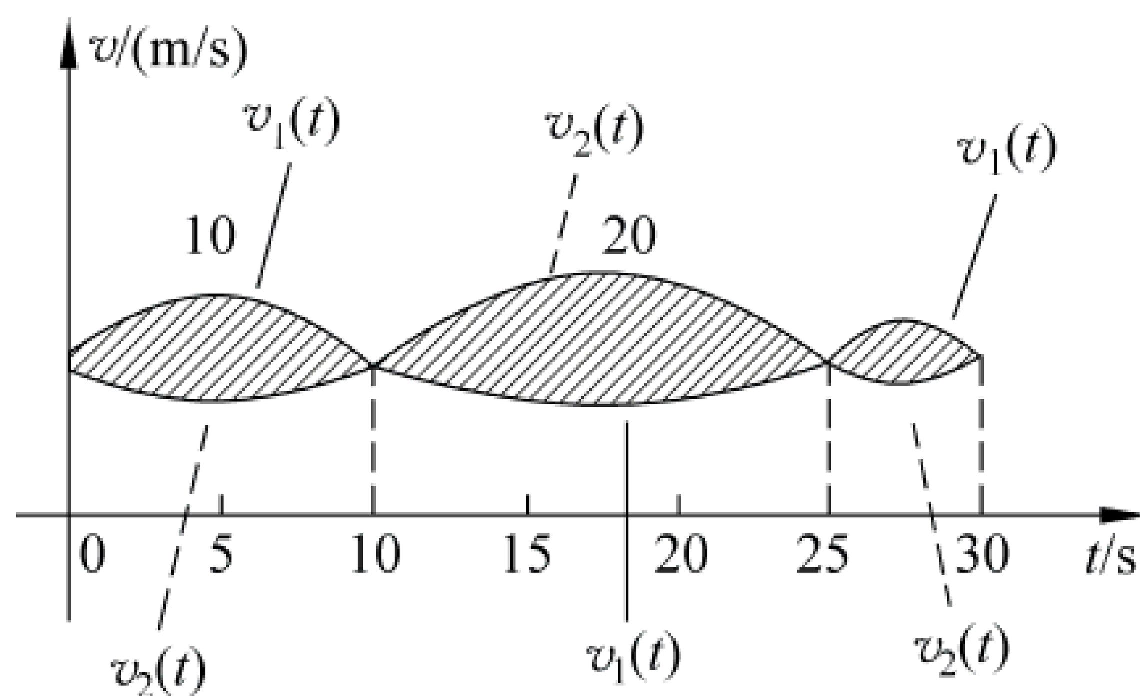


图 5-21

16. （2017，一(1)(4 分)）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10m，图 5-21 中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分的面积数值依次为 10，20，3，计时开始后，乙追上甲的时刻为 t_0，则

(A) $t_0=10$； (B) $15<t_0<20$； (C) $t_0=25$； (D) $t_0>25$。

考点与解法：定积分的应用。距离等于速度的定积分，定积分等于曲边梯形的面积，利用 $\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t-\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t=10$，求得 $t_0=25$。

17. （2017，三(17)(10 分)）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求

$y(x)$的极值。

考点与解法：隐函数的极值。求隐函数的稳定点，求隐函数的二阶导数，根据稳定点的二阶导数值，判断稳定点是否是极值点，是极大值点还是极小值点，再求出极值。

18.（2019，一(2)(4分)）设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x\leqslant 0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$的（　　）

(A) 可导点，极值点；　　(B) 不可导点，极值点；

(C) 可导点，非极值点；　　(D) 不可导点，非极值点。

考点与解法：求分段函数在分段点的导数及判断分段点是否是极值点。利用导数的定义，求分段点的导数。利用极值点的定义或几何判别法判断分段点是否是极值点。

19.（2019，三(15)(10分)）设函数 $y=y(x)$是方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的一个特解。

(i) 求函数 $y=y(x)$；

(ii) 求函数 $y=y(x)$的凸凹区间和拐点。

考点与解法：求一阶线性方程的特解，求凸凹区间和拐点。(i)根据一阶线性方程的求解公式，求通解再利用初始条件求出特解 $y(x)$；(ii)求函数 $y(x)$二阶导数，用二阶导数等于0的点，分定义域为若干区间，从而得到凸凹区间和拐点。

二、一元函数微积分的应用考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于一元函数微积分应用的考研数一真题共出了33道题，题型分布在：

1. 求渐近线方程：共有3个题，分布在2007年，2012年和2014年。

2. 求函数单调区间、极值和拐点：共有6个题，分布在2004年，2005年，2007年，2010年，2016年和2019年。

3. 求曲线切线方程：共有3个题，分布在2003年，2011年和2018年。

4. 微积分在几何方面的应用：共有7个题，分布在2006年，2010年，2011年，2012年，2013年，2014年和2019年。

5. 微积分在经济方面的应用：共有13个题，分布在2004年，2007年，2008年，2009年，2010年，2012年，2013年，2014年，2015年，2016年，2017年，2018年和2019年。

6. 讨论函数的性质：有1个题，分布在2019年。

1　一元函数微积分的应用考研数三真题题型分析

1. 求渐近线方程：2007年和2012年考了求曲线渐近线条数；2014年考了判断曲线是否有渐近线。

2. 求函数单调区间、凸凹区间、极值点和拐点：2004年考了判断一点是极值点还是拐点；2005年考了判断两个点是极大值点还极小值点；2007年考了一点附近的凸凹性；2010年考了判断一点成为极大值点的条件；2016年考了根据导函数图形，判断极值点和拐点的个数；2019年考求曲线的拐点。

3. 求曲线的切线方程：2003年考了曲线与直线相切，推导未知常数关系；2011年考了求由方程确定的隐函数在一点的切线方程；2018年考求曲线的切线方程。

4. 微积分在几何方面的应用：2006 年考了已知曲线围成的图形的面积，确定未知常数；2010 年考了旋转体的体积；2011 年考了平面图形绕坐标轴旋转的旋转体的体积；2012 年考了求平面图形的面积；2013 年考了旋转体的体积；2014 年考了无界区域图形的面积；2019 年考了求旋转体的体积。

5. 微积分在经济方面的应用：2004 年考了弹性和弹性的经济意义；2007 年考了已知弹性，求商品价格；2008 年考了复利问题，计算数项级数的和；2009 年考了边际收益；2010 年考了已知弹性，求函数的表达式；2012 年考了二元成本函数、最小值、边际成本的经济意义；2013 年考了边际利润、边际利润的经济意义、利润的最大值；2014 年考了边际收益；2015 年考了求商品价格；2016 年考了求需求函数的表达式和边际收益；2017 年考了求边际成本；2018 年考了平均成本函数最小值满足的条件；2019 年考求需求弹性。

6. 讨论函数的性质：2018 年考了利用泰勒公式判断函数值的符号。

2　一元函数微积分的应用考研数三真题

1. (2003，一(2)(4 分))已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=?$

考点与解法：未知常数的确定。利用三次曲线与 x 轴相切满足的条件(极值点的函数值等于 0)。

2. (2004，二(9)(4 分))设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

(A) 在 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(B) 在 $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(C) 在 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(D) 在 $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点。

考点与解法：判断极值点和拐点。根据函数图像。

3. (2004，三(18)(9 分))设某商品的需求函数为 $Q=100-5p$，其中价格 $p\in(0,20)$，Q 为需求量。

(i) 求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

(ii) 推导$\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$(其中 R 为收益)，并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加。

考点与解法：求需求弹性。(i)利用弹性公式；(ii)求边际收益，用弹性表示。

4. (2005，二(10)(4 分))设 $f(x)=x\sin x+\cos x$。下列命题正确的是

(A) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值；　　(B) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值；

(C) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值；　　(D) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值。

考点与解法：求极值点。求二阶导数，利用代数判别法。

5. (2006，三(18)(8 分))在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过 $M(0,1)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq0)$处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 $a>0$)。

(i) 求 L 的方程；

(ii) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为$\frac{8}{3}$时，确定 a 的值。

考点与解法：求函数表达式。(i)建立微分方程，解方程。(ii)利用求平面图形的面积公式，建立等式，确定 a 的值。

6. (2007，一(5)(4 分))设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 Q,p 分别表示需求量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是

(A) 10；　　(B) 20；　　(C) 30；　　(D) 40。

考点与解法：求商品价格。根据弹性公式，建立关于价格 p 的等式。

7. (2007，一(6)(4 分))曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线条数是

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) 3。

考点与解法：求渐近线。求所有渐近线，确定条数。

8. (2007，三(17)(10 分))设函数 $y=y(x)$由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$在点(1，1)附近的凸凹性。

考点与解法：判别凸凹性。求隐函数在(1，1)处二阶导数的符号。

9. (2008，三(19)(10 分))设银行存款利率为 $r=0.05$，并依年复利计算。某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，……，第 n 年提取$(10+9n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

考点与解法：复利问题。建立关于 A 的不等式，求级数的和。

10. (2009，二(12)(4 分))设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加多少元？

考点与解法：边际收益。计算收益对价格的变化率，边际收益，求导数。

11. (2010，一(3)(4 分))设函数 $f(x)$，$g(x)$具有二阶导数，且 $g''(x)<0$。若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$的极值，则 $f[g(x)]$在 x_0 取极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)<0$；　　(B) $f'(a)>0$；　　(C) $f''(a)<0$；　　(D) $f''(a)>0$。

考点与解法：极大值的充分条件。求复合函数的二阶导数，在点 x_0 处小于 0 应满足的条件。

12. (2010，二(10)(4 分))设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$$(e\leqslant x<+\infty)$下方，$x$ 轴上方无界区域为 G，求 G 绕 x 轴旋转一周所得的空间区域的体积。

考点与解法：计算旋转体的体积。利用旋转体的体积公式。

13. (2010，二(11)(4 分))设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，且 $R(1)=1$，求 $R(p)$表达式。

考点与解法：求收益函数的表达式。建立关于收益函数的方程，解方程。

14. (2011，二(11)(4 分))求曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点(0，0)处的切线方程。

考点与解法：求切线方程。求隐函数的导数。

15. (2011，二(12)(4 分))求曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。

考点与解法：计算旋转体的体积。利用旋转体的体积公式。

16. (2012，一(1)(4 分))曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线条数为

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) 3。

考点与解法：求渐近线。求所有渐近线，确定条数。

17. (2012，二(12)(4分))由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积。

考点与解法：平面图形的面积。利用定积分，计算平面图形的面积。

18. (2012，三(17)(10分))某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入固定成本为1000(万件)。设某企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件)和 y(件)，且这两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$(万元/件)与 $6+y$(万元/件)。

(1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元)；

(2) 当总产量为50件时，甲、乙两种产品的产量为多少时可使总成本最小？求最小成本；

(3) 求总产量为50件且总成本最小时，甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

考点与解法：求成本函数。建立二元成本函数，求二元函数的条件最值和边际成本。

19. (2013，三(16)(10分))设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

考点与解法：计算旋转体的体积。根据旋转体的体积公式，建立等式。

20. (2013，三(18)(10分))设生产某商品的固定成本为60000元，可变成本为20元/件，价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1000}$(p 是价格，单位：元，Q 是销量，单位：件)。已知产销平衡，求：

(1) 该商品的边际利润；

(2) 当 $p=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

(3) 使得利润最大的定价 p。

考点与解法：求利润和边际利润。建立利润函数，求边际利润，并求边际利润的最大值点。

21. (2014，一(2)(4分))题目同上小节13. (2014，一(1)(4分))题。

22. (2014，二(9)(4分))设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$(P 为商品的价格)，求该商品的边际收益。

考点与解法：求边际收益。建立收益函数，求边际收益。

23. (2014，二(10)(4分))设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $x+y=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，求区域 D 的面积。

考点与解法：平面图形面积和反常积分。用反常积分计算平面图形的面积。

24. (2015，三(17)(10分))为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为商品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，$\eta(\eta>0)$ 是需求弹性。

(1) 证明定价模型为 $p=\dfrac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$；

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-p$，试利用(1)中的定价模型确定此商品的价格。

考点与解法：证明定价模型。建立利润函数，再求边际利润，并求边际利润的最大值点。

25．(2016，一(1)(4 分))设函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$内连续，其导函数如图 5-22 所示，则

(A) 函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点；

(B) 函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点；

(C) 函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点；

(D) 函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点。

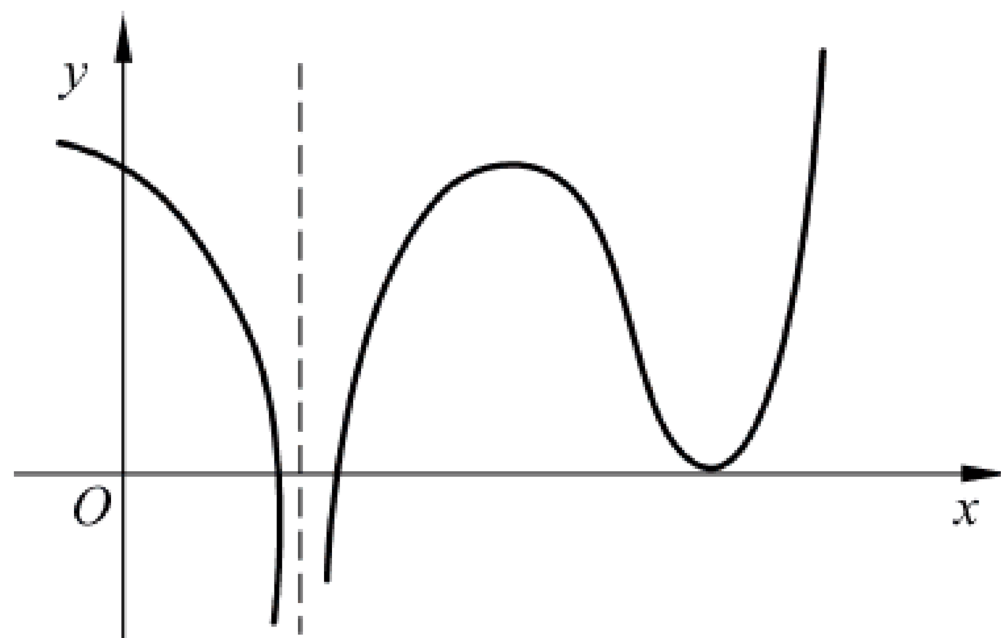


图 5-22

考点与解法：根据导函数图形求拐点和极值点。

极值点产生于疑似极值点，且左右单调性不同($f'(x)$符号不同)；拐点产生于疑似拐点，且左右凸凹性不同($f''(x)$符号不同)。

26．(2016，三(16)(10 分))设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数为 $Q=Q(p)$，需求弹性为 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价(万元)。

(i) 求需求函数的表达式；

(ii) 当 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义。

考点与解法：求需求函数和边际收益。(i)根据 $\eta=\dfrac{p}{120-p}$，建立需求函数微分方程，解方程。(ii)求边际收益函数。

27．(2017，二(11)(4 分))设某商品的平均成本为 $\bar{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中 Q 为产量，求边际成本。

考点与解法：求边际成本。根据平均成本，求成本函数，求导，得到边际成本。

28．(2018，一(2)(4 分))设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$；　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$；

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$；　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$。

考点与解法：判断函数值的符号。将函数 $f(x)$ 在点 $\dfrac{1}{2}$ 写成泰勒公式，再对等式两边求区间$[0,1]$上的定积分。

29．(2018，一(4)(4 分))某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导，其中 Q 为产量。若产量为 Q_0 时的平均成本最小，则

(A) $C'(Q_0)=0$；　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$；

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$；　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$。

考点与解法：函数在一点取得最小值满足的条件。求平均成本函数，Q_0 是平均成本函

数的最小值点，则导数等于 0。

30. (2018，二(9)(4 分))求曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在拐点处的切线方程。

考点与解法：求曲线的拐点，切线方程。求出曲线的拐点(二阶导数等于 0 的点)，再求该点的切线方程。

31. (2019，二(9)(4 分))求曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$的拐点坐标。

考点与解法：求曲线的拐点。求函数的二阶导数等于 0 的点，得到拐点的横坐标，从而得到拐点。

32. (2019，二(11)(4 分))A，B 两商品的价格分别为 P_A 和 P_B，需求函数为

$$Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2,\quad P_A=10,\quad P_B=20。$$

求 A 商品对自身价格的需求弹性 η_{AA}。

考点与解法：求需求函数的弹性。确定 $P_B=20$ 时，$Q_A=1300-P_A^2-20P_A$，求弹性函数 η，再求 $P_A=10$ 时的函数值。

33. (2019，三(17)(10 分))已知 $y=y(x)$是方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$满足 $y(1)=\sqrt{e}$的一个特解

(i) 求函数 $y=y(x)$；

(ii) 若 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求平面区域 D 绕 x 旋转成的旋转体的体积。

考点与解法：求一阶线性方程的特解，求旋转体的体积。根据一阶线性方程的求解公式，求通解，再利用初始条件求出特解 $y(x)$；利用旋转体的体积公式 $V_x=\pi\int_1^2 y^2(x)\mathrm{d}x$，计算旋转体的体积。

5.6 本章练习题答案与提示

练习题 5-1 答案与提示

1. $\sqrt[3]{3}$。提示。问题归结到求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$的最大值，$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，驻点为 $x=e$。在$(0,e)$内单调增加，在$(e,+\infty)$上单调减少，所以数列中$\sqrt{2}$和$\sqrt[3]{3}$可能为最大项，比较$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$。

2. $f_{\max}=f(\sqrt{2})=1+e^{-2}$，$f_{\min}=f(0)=0$。提示：$f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}$，驻点为 0，$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$，根据函数定义，$f(x)$是偶函数，显然 $f(0)=0$，且

$$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}\mathrm{d}t=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}\mathrm{d}t=2+e^{-t}\Big|_0^2=1+e^{-2};$$

$$f(+\infty)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}\mathrm{d}t=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=2+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1。$$

所以 $f_{\max}=1+e^{-2}$，$f_{\min}=0$。

3. 最小值：$f\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，无最大值。提示：当 $x>1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\dfrac{1}{3}$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}$，$f(x)$是偶函数，所以驻点是 0 和$\pm\dfrac{1}{2}$，分段

点±1,$f(0)=\frac{1}{3}$,$f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,$f(\pm1)=\frac{2}{3}$。显然不存在最大值,最小值为$f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$。

4. $y=\frac{1}{4}x-1+2\ln2$。提示:设$2\leqslant a\leqslant6$,曲线$y=\ln x$上的点$(a,\ln a)$的切线方程为$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a=\frac{1}{a}x+\ln a-1$,它和三直线$x=2$,$x=6$和$y=\ln x$所围成的图形面积为$S(a)=\int_2^6\left[\ln x-\left(\frac{1}{a}x+\ln a-1\right)\right]\mathrm{d}x=6\ln6-2\ln2-\frac{16}{a}-4\ln a$,$S'(a)=\frac{16}{a^2}-\frac{4}{a}$,驻点为$a=4$,根据实际问题意义,此点是面积函数的最小值点。

5. $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$。提示:将对数螺线极坐标方程转化为直角坐标下的参数方程是

$$x=\rho\cos\theta=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta,$$

切点$(0,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})$,切线斜率为$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$,切线方程$y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-1\cdot(x-0)$,即$x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$。

6. $x=2$。提示:$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\mathrm{d}t$,于是$F'(x)=\frac{x-2}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$,由于$f(x)$是定义在$(1,+\infty)$的正值函数,所以$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$,$x=2$是唯一驻点,并且是极小值点。

7. $y(1)=1$是极小值。提示:求得$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$,令$y'=0$,得$x=y$,代入方程中,得到$2x^3-x^2=1$,唯一驻点$x=1$。由$y'=\frac{2(x-y)}{6y^2-4y+2x}$求二阶导数,得到$y''=2\frac{(1-y')(6y^2-4y+2x)-(x-y)(12yy'-4+2)}{(6y^2-4y+2x)^2}$,于是$y''\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{2}>0$,所以$y(1)=1$是极小值。

8. $y=2x-1$。提示:设通过$(1,1)$的直线方程为$y-1=k(x-1)$,则积分

$$I(k)=\int_0^2[x^2-k(x-1)+1]^2\mathrm{d}x=\int_0^2[x^2-kx+k+1]^2\mathrm{d}x。$$

9. $f_{\max}=\pi$。提示:$f'(x)=1-a\sin x$,$f''(x)=-a\cos x$,于是$x=\pi-\arcsin\frac{1}{a}$是极小值点,$x=\arcsin\frac{1}{a}$就是极大值点。由于函数在区间$(0,2\pi)$内有极小值点,且极小值是0,所以$f\left(\pi-\arcsin\frac{1}{a}\right)=0$,极大值为

$$f\left(\arcsin\frac{1}{a}\right)=\arcsin\frac{1}{a}+a\cos\arcsin\frac{1}{a}=\pi-\left[\pi-\arcsin\frac{1}{a}+a\cos\left(\pi-\arcsin\frac{1}{a}\right)\right]=\pi。$$

10. $a=\frac{5}{12}$,$b=\frac{7}{18}$,$c=0$。提示:由$y=ax^2+bx+c$过原点,所以$c=0$。由曲线与x轴以及$x=1$所围成的图形的面积为$\frac{1}{3}$,则$\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$,即$a=1-\frac{3}{2}b$。此图形绕$x$轴旋转一周的立体的体积

$$\begin{aligned}V(b)&=\pi\int_0^1\left[\left(1-\frac{3}{2}b\right)x^2+bx\right]^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{5}\left(1-\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}b\left(1-\frac{3}{2}b\right)+\frac{1}{3}b\right]\\&=\left[-\frac{3}{10}b^2+\frac{7}{30}b+\frac{1}{5}\right]\pi,\end{aligned}$$

于是$V'(b)=\pi\left(-\frac{3}{5}b+\frac{7}{30}\right)$。令$V'(b)=0$,解得$b=\frac{7}{18}$。

11. (1) $y=x+5$和$x=1$。提示:由于$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=5$,所以斜渐近线是$y=x+5$。$x=1$是铅直渐近线。

(2) $y=1$和$x=0$。提示:由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=1$,所以$y=1$是水平渐近线;显然$x=0$是铅直渐近线。

12. 水平渐近线：$y=1$；铅直渐近线：$x=1$，$x=-1$；斜渐近线：$y=x+\ln 3$。提示：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{1}{x+1}}=1$，所以 $y=1$ 是水平渐近线；$x=1$ 和 $x=-1$ 是铅直渐近线；

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{x}}=1,\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(x3^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}\ln 3=\ln 3。$$

13. $x=1,y=x+\frac{1}{2},y=-x-\frac{1}{2}$。提示：$x=1$ 是铅直渐近线。斜渐近线为

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=1,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=-1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left[\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)-1\right]=-\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}。$$

14. (1)在$(-\infty,0)$内和$(2,+\infty)$内是增区间、在$(0,2)$内是减区间，极小值是3；(2)在定义域上是凹函数；(3)铅直渐近线：$x=0$，斜渐近线：$y=x$。提示：求导 $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$，驻点和导数不存在的点0和2。显然在$(-\infty,0)$内和$(2,+\infty)$内是增区间、在$(0,2)$内是减区间，$x=2$ 是极小值点，极小值是3；显然 $x=0$ 是铅直渐近线；可求斜渐近线 $y=x$。

15. $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$，极小值 $y(0)=0$；极大值 $y(2)=6$。提示：由于$(1,3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，所以 $y''(1)=6a+2b=0$，且 $3=a+b$，解得 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$。曲线 $y=-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2$，$y'=-\frac{9}{2}x^2+9x$，驻点 $x=0,x=2$。极小值 $y(0)=0$；极大值为 $y(2)=6$。

练习题 5-2 答案与提示

1. (1) $e+e^{-1}-2$。提示：面积 $S=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$。

(2) $\frac{1}{6}$。提示：$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\frac{1}{6}$。

(3) $\frac{1}{2}$。提示：曲线与 x 轴有三个交点，分别是 -1，0 和 1，于是面积为

$$S=\int_{-1}^1|x(1-x^2)|dx=-\int_{-1}^0x(1-x^2)dx+\int_0^1x(1-x^2)dx=\frac{1}{2}。$$

(4) $\frac{253}{11}$。提示：两个曲线有三个交点，分别是-2，0 和 4，于是面积为

$$S=\int_{-2}^3|x^3-6x-x^2|dx=\int_{-2}^0(x^3-6x-x^2)dx-\int_0^3(x^3-6x-x^2)dx=\frac{253}{11}。$$

(5) πa^2。提示：闭曲线围成区域的面积 $S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a^2\cos^2\theta d\theta=\pi a^2$。

(6) $\frac{3}{4}\pi a^2$。提示：曲线的极坐标方程为 $r^2=a^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)$，曲线显然关于两坐标轴对称，

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)d\theta=a^2\pi-a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi a^2。$$

2. (1) 64π。提示：$V=\int_{-2}^{2}(4-x^2)(3-x)2\pi dx=64\pi$。

(2) $2\pi^2$。提示：令 $x-1=\sin t$，

$$V=2\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\cdot 2\pi x dx=4\pi\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx=4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(\sin t+1)dt$$

$$=4\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt\right)=4\pi\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi^2。$$

(3) $\frac{\pi a}{2},2\pi a^2$。提示：$V_x=\int_a^{2a}f^2(x)\pi dx=\pi a^2\int_a^{2a}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\pi a$，

$$V_y=\int_a^{2a}f(x)2\pi x dx=\int_a^{2a}2\pi a dx=2\pi a^2。$$

3. (1) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$。提示：$S=2\left[\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx\right]=\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$。

(2) $\frac{16}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi$。提示：$V_x=2\left[\int_0^1\pi x^4dx+\int_1^{\sqrt{2}}\pi(2-x^2)^2dx\right]=\frac{16}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi$。

(3) $\frac{16}{15}\sqrt{2}\pi$。提示：$V_x=\left[\int_0^1 x^2\cdot 2\pi x dx+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\cdot 2\pi x dx\right]=\frac{16}{15}\sqrt{2}\pi$。

4. $\frac{5}{4}\pi$。提示：$S=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta d\theta\right]=\frac{5}{4}\pi$。

5. $\frac{3}{2}\pi a^2,8a$。提示：$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$，

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a。$$

6. $6a,\frac{1}{8}\pi a^2,\frac{32}{105}\pi a^3$。提示：$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=6a$。

$$S=4\int_0^a y dx=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t dt=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt=\frac{3}{8}\pi a^2。$$

$$V=2\int_0^a y^2\pi dx=2a^2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3。$$

7. $(\sqrt[5]{2}-1)h$。提示：$V=\int_0^{\frac{h^2}{4}}y\cdot 2\pi x dx=4\pi\int_0^{\frac{h^2}{4}}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{20}h^5$，设当体积为 $2V$ 时，水面高度为 x，则有 $2V=\frac{\pi}{20}x^5$，于是有$\frac{\pi}{20}x^5=2\cdot\frac{\pi}{20}h^5$，$x=\sqrt[5]{2}h$，所以水面提高高度为$(\sqrt[5]{2}-1)h$。

8. $K=2$。提示：由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=2$，得到 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=2$，所以 $K=\frac{f''(0)}{1+[f'(0)]^2}=2$。

练习题 5-3 答案与提示

1. $g(\mu-1)(H-1)+g\left(\mu-\frac{1}{2}\right)$。提示：适当建立坐标系，水平面为 x 轴，纵向为 y 轴，当立方体在水中部分高度为 y 时，将物体提高 dy 距离所做的功为

$$dW=dy\cdot F=dy(g\cdot 1\cdot\mu-g\cdot y\cdot 1)=g(\mu-y)dy,$$

$$W=W_{水平下}+W_{水平上}=g(\mu-1)(H-1)+\int_{-1}^{0}g(\mu-y)dy$$

$$=g(\mu-1)(H-1)+g\left(\mu-\frac{1}{2}\right)。$$

2. $3\mu gL\pi R^3$(J)。提示：适当建立坐标系，如图 5-23 所示，设水的比重是 μ，则柱体的比重是 2μ，对任

意区间$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-R,R]$,柱体薄片的体积为

$$2yL\,\mathrm{d}x=2L\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

移到水面时的距离为$R-x$,所受力为$2\mu gL\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$(重力－浮力),所以移到水面所做的功为

$$2\mu gL(R-x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x;$$

整个移到水面时,薄片离水面距离为$R+x$,所做的功为

$$4\mu gL(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

于是对薄片所做的功为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=4\mu gL(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x+2\mu gL(R-x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\mu gL(3R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以$W=2\mu gL\int_{-R}^{R}(3R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=3g\mu L\pi R^3$。

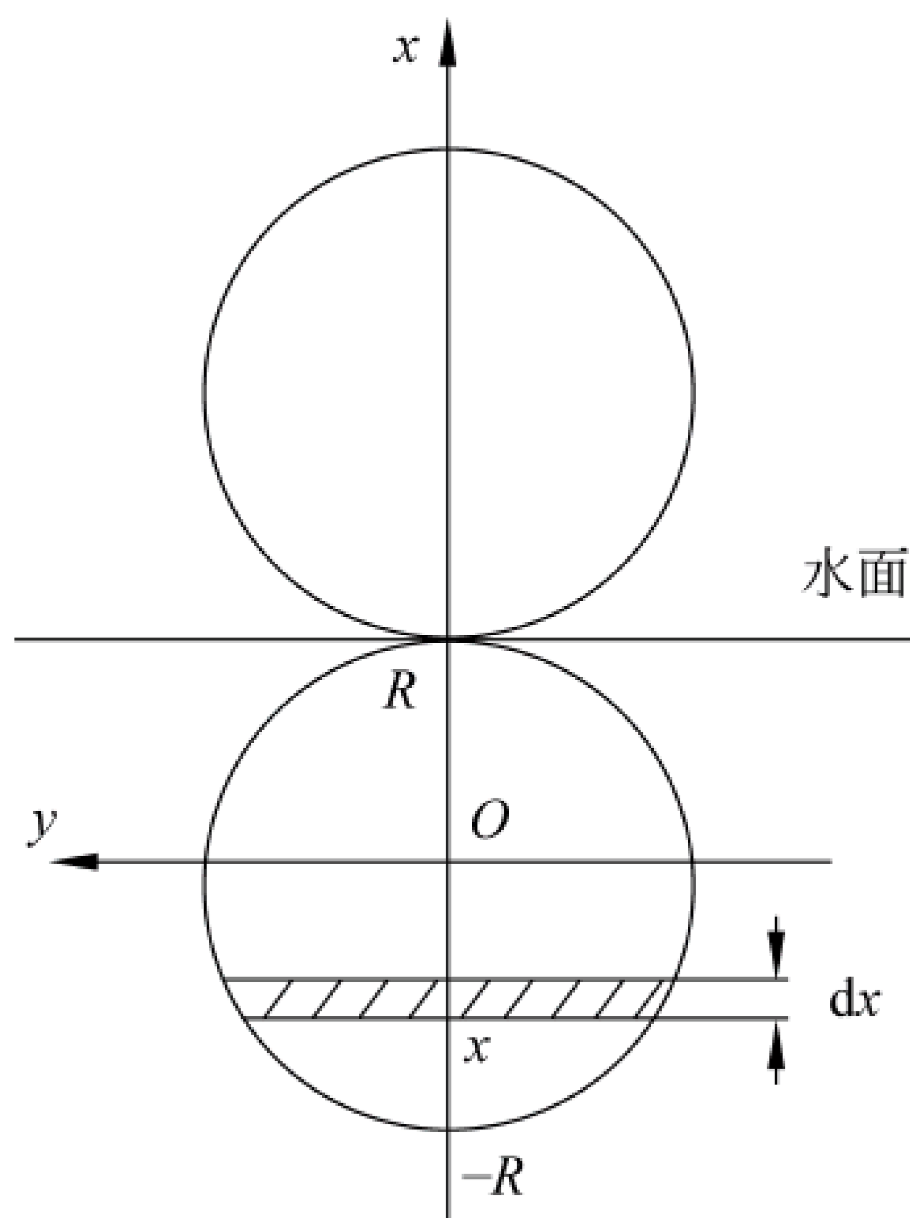


图 5-23

3. $0.25\pi g\mu$。提示:适当建立坐标系,选取水平面为x轴,纵向为y轴,在y轴的$[-1,0]$区间上任取一点y(距离水平面距离),将此面厚度为$\mathrm{d}y$的水平面片取出所做的功为

$$\mathrm{d}W=y\mathrm{d}F=y(1-y^2)\pi g\mu\mathrm{d}y,\quad W=\int_{-1}^{0}y(1-y^2)\pi g\mu\mathrm{d}y=\pi g\mu\int_{-1}^{0}y(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\pi g\mu。$$

4. $\frac{32}{15}g$。提示:适当建立坐标系,涵洞的顶点为原点,水平方向为x轴,纵向向下方向为y轴,则涵洞闸门边界曲线方程为$y=x^2$。在$[-1,0]$上任取一点y,宽度为$\mathrm{d}y$的闸门条所受压力$\mathrm{d}F=(1+y)2\sqrt{y}\mathrm{d}yg$,所以$F=\int_0^1(1+y)2\sqrt{y}\mathrm{d}yg=\frac{32}{15}g$。

5. 90。提示:$V=\frac{1}{10}\int_0^{10}(3t^2+2t)\mathrm{d}t=90$。

6. πa^2b。提示:适当建立坐标系,取水箱顶头面中心为原点,水平为y轴,纵向向上为x轴,顶头面方程为$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$,压力微元$\mathrm{d}p=\frac{2b}{a}(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,压力

$$p=\int_{-a}^{a}\frac{2b}{a}(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=2b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi a^2b。$$

7. $2\pi km\sigma\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$。提示:任取$[r,r+\mathrm{d}r]$对应的圆环,它的面积$\mathrm{d}S=2\pi r\mathrm{d}r$,质量$\mathrm{d}M=\sigma\mathrm{d}S=2\pi r\sigma\mathrm{d}r$,质点对圆环引力(垂直向下)为$\mathrm{d}F=k\frac{m2\pi\sigma r}{r^2+b^2}\mathrm{d}r\cos\theta=k\frac{bm2\pi\sigma r}{(r^2+b^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$,于是$F=\int_0^a\frac{kbm2\pi\sigma r}{(r^2+b^2)^{3/2}}\mathrm{d}r=kbm2\pi\sigma\left[-(r^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^a=2\pi km\sigma\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$。

练习题 5-4 答案与提示

1. 答案:(1) 设销售额为R,则$R=PQ=P\left(\frac{a}{P+b}-c\right)$,$R'=\frac{ab-c(P+b)^2}{(P+b)^2}$。驻点$P_0=\sqrt{\frac{ab}{c}}-b=\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})>0$,当$0<P<\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$时,有$R'>0$,故随$P$的增加,相应的销售额也增加,当$P>\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$时,有$R'<0$,故随$P$的增加,相应的销售额却减少。(2) 当$P=\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$销售额达到最大值,最大销售额为$R_{\max}=(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2$。

2. 答案：(1)需求对价格弹性函数为$\frac{Ep}{Eq}=p'\cdot\frac{q}{p}=-\frac{q}{d-q}$，所以当$\left|\frac{q}{d-q}\right|=1$时，$q=\frac{1}{2}d$，所以$p=\frac{d}{2e}$；(2)利润$L$等于收入减去成本，即$L=pq-C$，$L_{\max}=\frac{(d-b)^2}{4(e+a)}-C$；(3)$\eta=-\frac{q}{p}p'=\frac{d-ep}{ep}$。

3. 答案：(1)利润函数$L(x)=18x-3x^2-4x^3$；(2)边际收益函数$MR(x)=26-4x-12x^2$；(3)边际成本函数$MC(x)=8+2x$；(4)最大利润是11，产量为1时利润最大。

4. 答案：(1)边际利润函数$L'(x)=R'(x)-C'(x)=-8+10x-3x^2$，驻点$x=2$，于是利润函数为$L(x)=C-8x+5x^2-x^3$，当$x=0$时，固定成本为10，所以$C=10$，因此总收益函数$L(x)=10-8x+5x^2-x^3$；(2)当$x=2$时利润最大。

5. $P_A=103\frac{1}{3}$，$P_B=7\frac{1}{3}$。提示：依题意$Q_A+Q_B=8000-40P_A+500-50P_B=4000$，所以$4P_A+5P_B=450$，利润函数

$$\begin{aligned}L&=P_AQ_A+P_BQ_B-C_A-C_B=8000P_A-40P_A^2+500P_B-50P_B^2-(1000-5Q_A)-(120+3Q_B)\\&=37380+7800P_A-40P_A^2+350P_B-50P_B^2。\end{aligned}$$

6. 答案：(1) 由$-\frac{p}{D}\cdot\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}p}=3$，解得$\ln D=-3\ln p+\ln C_1$，根据$D(1)=D_0$，有$D=D_0p^{-3}$。类似地由$\frac{p}{S}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}=2$，解得$S=S_0p^2$。当$D=S$时，供求平衡，平衡价格为$p=\left(\frac{D_0}{S_0}\right)^{\frac{1}{5}}$。

(2) 由$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{k(D-S)}{p}=k[D_0p^{-4}-S_0p]$，解方程得$p=\left[\frac{D_0}{S_0}(1-e^{-5S_0kt})+p_0^5e^{-5S_0kt}\right]^{\frac{1}{5}}$。

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{D_0}{S_0}(1-e^{-5S_0kt})+p_0^5e^{-5S_0kt}\right]^{\frac{1}{5}}=\left[\frac{D_0}{S_0}\right]^{\frac{1}{5}}=\bar{p}$。

考研真题答案

数一真题答案：1. C；2. $A=\frac{1}{2}e-1$，$V=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$；3. $y=x-1$；4. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$；5. 20；6. D；7. $y=x+1$；8. 在$(-1,0)$和$(1,+\infty)$单调增加，在$(-\infty,-1)$内和$(0,1)$内单调减少，极小值为0，极大值为$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$；9. $\ln(1+\sqrt{2})$；10. C；11. C；12. $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$，面积为$\frac{\pi}{4}$；13. B；14. -2；15. C；16. C；17. 1，0；18. B；19. (i) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$，(ii) 拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$。

数三真题答案：1. $4a^6$；2. C；3. (i)$E_d=\frac{P}{20-P}$，(ii)当$10\leqslant P\leqslant 20$时，降低价格反而使收益增加；4. D；5. L：$y=ax^2-ax$，$a=2$；6. D；7. D；8. 凸的；9. 3980(万元)；10. 8000；11. B；12. $\frac{\pi^2}{4}$；13. $pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$；14. $y=-2x$；15. $\frac{4}{3}\pi$；16. C；17. $4\ln 2$；18. (i)$C(x,y)=1000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}$，(ii)甲为24件，乙为26件，最小成本为11118(万件)，(iii)甲产品的边际成本为32，其经济意义为：当生产乙产品为26件时，生产第25件甲产品需32万元；19. $a=7\sqrt{7}$；20. (i)$I'(Q)=40-\frac{Q}{500}$，(ii)$I'(10000)=20$这表明当价格$p=50$元时，每销售一件产品可获得利润20元，(iii)$p=40$元；21. C；22. $R'(Q)=20-Q$；23. $\frac{3}{2}-\ln 2$；24. $p=30$；25. B；26. $Q=120-10p$；8000，需求量提高1件，收益增加8000万元。27. $C'(Q)1+(1-Q)e^{-Q}$；28. D；29. D；30. $y=4x-3$；31. $(\pi,-2)$；32. $\frac{2}{5}$；33. $y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$，$V_x=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$。

第 6 章

微分方程

基本概念

1. 微分方程、常微分方程；
2. 微分方程的阶、解、通解、特解；
3. 可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程；

*4. 伯努利方程、全微分方程。

基本结论

1. 二阶线性微分方程解的结构；
2. 二阶常系数线性齐次方程、非齐次方程解的一般形式；

*3. n 阶常系数线性齐次方程解的一般形式。

基本方法

1. 求可分离变量方程的解；
2. 求齐次方程的解；
3. 求一阶线性方程的解；

*4. 求伯努利方程的解；

*5. 求全微分方程的解；

6. 利用简单的变量替换求方程的解；
7. 计算二阶常系数线性齐次方程的解；
8. 计算二阶常系数线性非齐次方程的解；
9. 计算可降阶的二阶微分方程的解；

*10. 求 n 阶常系数线性齐次方程的解；

11. 求函数的表达式；

***12. 求一阶差分方程的解；

***13. 求二阶差分方程的解。

6.1 一阶微分方程的解法

一、基本概念

定义 1 微分方程 表示未知函数、未知函数导数或微分与自变量关系的方程称为**微分方程**。

定义 2 常微分方程 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**(简称微分方程)。

定义 3 方程的阶 微分方程中的导数或微分的最高阶称为**方程的阶**。

定义 4 方程的解 若 $y=f(x)$ 满足微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$,则称 $y=f(x)$ 是微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的**解**。方程解分为**显示解**和**隐示解**。

定义 5 通解 含有任意常数,任意常数的个数与方程的阶数相同的解称为方程的**通解**。

定义 6 特解 满足某个初始条件的解称为方程的**特解**。

注 方程的通解不一定包含方程的所有解。

例如:方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解是:$y^4(x-4)=Cx$,但经检验,$x=0$,$x=4$,$y=0$ 也是方程的解。但 $x=0$ 解根本没有包含在通解中。

形如 $y=f(x)$ 的解称为显示解,形如 $F(x,y)=0$ 的解(由方程确定的函数,即隐函数)称为隐示解。方程的解既可以用显函数表示,也可以用隐函数表示。

二、基本方法

一阶方程共分为五类:可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程、伯努利方程和全微分方程,每类方程都有其特有的解法。因此若求一阶方程的解,必须识别方程并掌握此类方程的求解方法。

题型 1 求可分离变量方程的解

可分离变量的方程有两类:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)q(y)$,求此类方程解的基本方法为:分离变量,则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{q(y)}=p(x)\mathrm{d}x$,两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{q(y)}=\int p(x)\mathrm{d}x$。

(2) $M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x+N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0$,求此类方程解的基本方法为:分离变量,则有 $\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=-\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x$,两边积分 $\displaystyle\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=-\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x$。

例 6.1 求下列可分离变量方程的通解:

(1) $(1+y^2)x\mathrm{d}x+(1+x^2)y\mathrm{d}y=0$; (2) $y'-y^2\cos x=0$。

解 (1) 将方程化为 $\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$,两端积分 $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$,所以 $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)+C_1$,整理得到

$$(1+y^2)(1+x^2)=C,\quad \text{其中}\quad C=e^{2C_1}。$$

（2）方程化为 $\frac{1}{y^2}dy=\cos x dx$，两端积分得 $-\frac{1}{y}=\sin x+C$，所以原方程的通解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+C}。$$

注 方程解是 $F(x,y,C)=0$ 形式，称为隐示解，方程的解可以用隐示解表示，如本例的(1)题，也可以用显示解表示，如本例的(2)题。

在任意常数的处理上，有时为化简方便，常常将任意常数 C 写成 $\ln|C|$。

任意常数 C 有时也是有限制的，如例 6.1(1)方程通解 $(1+y^2)(1+x^2)=C$，则 C 只能大于或等于 1，因此并非所有任意常数都可以取任何实数。

题型 2 求齐次方程的解

齐次方程的基本形式是：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，求此类方程解的基本方法为：

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，对 x 求导有 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$，于是 $\varphi(u)=x\frac{du}{dx}+u$，从而原方程化为变量分离方程 $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$。最后，两边积分，求解。

例 6.2 求下列齐次方程的通解或特解：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y}$；　　(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$，$y(-1)=0$。

解 (1) 方程转化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$，是齐次方程。令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\varphi(u)-u=\frac{u}{1-u}-u=\frac{u^2}{1-u}$，所以原方程转化为 $\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$，两边积分得到

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+C,$$

所以有 $\ln|ux|=-C-\frac{1}{u}$，整理得到方程的通解为 $y=C_1e^{-\frac{x}{y}}$，其中 $C_1=\pm e^{-C}$。

(2) 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\varphi(u)-u=\frac{1}{u}$，于是原方程转化为 $udu=\frac{dx}{x}$，两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$。根据初始条件 $y(-1)=0$，求得 $C=0$，所以方程的特解为 $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|$。

注 求齐次方程的解是利用变量替换，经过变量替换，使方程化为可分离变量的方程。在具体解齐次方程时，作变量替换 $u=\frac{y}{x}$，方程转化为 $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$。同时，求出方程的通解后一定要变量还原，即将 u 换成 $\frac{y}{x}$，并且将得到的解尽可能的化成比较简单的形式。

题型 3 求一阶线性方程的解

一阶线性方程的一般形式是：$y'+p(x)y=q(x)$。此类方程有公式解，其通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)。$$

例 6.3 求下列一阶线性方程的通解：

(1) $y'+\frac{y}{x}=e^{-x^2}$；　　(2) $y'=\frac{1}{xy+y^3}$。

解 (1) 此方程是一阶线性方程，有公式解，其通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)。$$

(2) 把 x 看作 y 的函数，于是有 $\frac{dx}{dy}-yx=y^3$，即 $x'-yx=y^3$，此方程是一阶线性方程，有公式解，其通解为

$$\begin{aligned}x&=e^{\int ydy}\left(\int y^3e^{\int -ydy}dy+C\right)=e^{\frac{1}{2}y^2}\left(\int y^3e^{-\frac{1}{2}y^2}dy+C\right)\\&=e^{\frac{1}{2}y^2}\left(-y^2e^{-\frac{1}{2}y^2}+\int e^{-\frac{1}{2}y^2}dy^2+C\right)\\&=e^{\frac{1}{2}y^2}\left(-y^2e^{-\frac{1}{2}y^2}-2e^{-\frac{1}{2}y^2}+C\right)=-y^2-2+Ce^{\frac{1}{2}y^2}。\end{aligned}$$

注 事实上，求一阶线性方程的解是利用常数变易法，但最终还是要计算公式解中的积分，所以公式法是解这类方程最简单、最有效的方法。

***题型 4 求伯努利方程的解**

伯努利方程的一般形式为：$y'+p(x)y=q(x)y^n$，求此类方程解的基本方法：

令 $z=y^{1-n}$，对变量 x 求导，则有 $z'=(1-n)y^{-n}\cdot y'$，对原方程两边同乘 $(1-n)y^{-n}$，有

$$(1-n)y^{-n}\cdot y'+(1-n)y^{-n}p(x)y=(1-n)y^{-n}q(x)y^n,$$

于是有

$$z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x),$$

从而原伯努利方程化为一阶线性方程，该方程通解为

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[\int(1-n)q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx+C\right]。$$

例 6.4 求下列伯努利方程的通解：

(1) $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$；　　(2) $(2xy^2-y)dx+xdy=0$。

解 (1) 令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$，则得 $z'-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x$，此时方程是一阶线性方程，于是有

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{1}{2}xe^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right),$$

所以方程的通解 $\sqrt{y}=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)$。

(2) 变形得 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-2y^2$，此方程是伯努利方程。令 $z=y^{1-2}=y^{-1}$，则有 $z'+\frac{1}{x}z=2$。所以

$$\begin{aligned}y^{-1}=z&=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\\&=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int 2e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int 2xdx+C\right)=\frac{1}{x}(x^2+C),\end{aligned}$$

取其倒数得到 $y=\frac{x}{x^2+C}$。

注 求伯努利方程的解实质是变量替换，经过变量替换后，将这类方程化为一阶线性方程，此类方程有公式解。

***题型 5 求全微分方程的解**

若方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 满足 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则称该方程为**全微分方程**，或**恰当方程**。此类方程一定存在 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y,$$

于是 $u(x,y)=C$ 就是方程的通解。

此类方程的有两种解法：

方法 1 特殊路径积分法：如果是全微分方程，则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y。$$

为了求 $u(x,y)$，可选取特殊路径法，从 (x_0,y_0) 到 (x_0,y)，再从 (x_0,y) 到 (x,y) 的折线段，于是有 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\mathrm{d}y$。

一般情况下，(x_0,y_0) 可以任意选取，只要有利于积分，通常情况下，选取 (x_0,y_0) 为 $(0,0)$。当然选取的点不同，求得 $u(x,y)$ 可能是不同的，但最多相差一个常数。

方法 2 不定积分法：如果是全微分方程，则$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$，于是

$$u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+C(y),$$

其中 $C(y)$是关于 y 的函数，为了确定 $C(y)$，根据全微分方程的特点有 $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$，即

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\left(\int M(x,y)\mathrm{d}x+C(y)\right)'=N(x,y),$$

于是 $C(y)=\int\left[N(x,y)-\left(\int M(x,y)\mathrm{d}x\right)'\right]\mathrm{d}y+C$。

方法 3 分组凑微分法：通过分组，可以确定全微分函数 $u(x,y)$，即

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$$

则方程的通解就是 $u(x,y)=C$。

注 分组凑微分法，是求某些简单全微分方程解的最好方法，但对有些方程是不适用的。这是因为凑微分法是通过观察得到 $u(x,y)$的，而对一些复杂方程，通过观察是没办法看出 $u(x,y)$ 的，此时，只能选择特殊积分路径或不定积分法，求出 $u(x,y)$。

分组凑微分的具体方法是：将只含有 x 分为一组，如 $x\mathrm{d}x$；只含有 y 分为一组，如 $\sin y\mathrm{d}y$；即含有 x 又含有 y，如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，且$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，两项被分为一组。

例 6.5 求下列方程的通解：

(1) $(3x^2+2x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x+(3y^2-x^2\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=0$；　　(2) $\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$。

解 (1) 由于 $\frac{\partial M}{\partial y}=-2xe^{-y}=\frac{\partial N}{\partial x}$,此方程是全微分方程,利用分组凑微分法

$$\begin{aligned}(3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy&=3x^2dx+2xe^{-y}dx-x^2e^{-y}dy+3y^2dy\\&=dx^3+dx^2e^{-y}+dy^3=d(x^3+x^2e^{-y}+y^3),\end{aligned}$$

所以方程的通解是 $x^3+x^2e^{-y}+y^3=C$。

(2) 由于$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial N}{\partial x}$,此方程是全微分方程,利用特殊路径积分,选取积分起点为(0,1),于是有

$$\int_0^x\frac{2x}{1^3}dx+\int_1^y\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C,\quad 即\quad x^2+\left(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}\right)\Bigg|_1^y=C。$$

于是方程的通解是 $-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}=C$,即 $y^2-x^2=Cy^3$。

注 需要指出的是:用特殊路径积分法时,必须验证 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$,确定与路径无关,否则得到的解未必是方程的解。但分组凑微分法是没必要验证的,只要凑成全微分即可。

题型6 利用简单的变量替换求一阶方程的解

将方程归属五大类之一是解方程一个重要工作,如果没办法归到哪一类,一般考虑对方程做简单的变量替换:

(1) 若出现 $f(xy)$,$f(x\pm y)$,$f(x^2\pm y^2)$,$f(y/x)$等一般不易处理的形式,或者说 x 和 y 被捆绑在一起不易分开时,一般可以做变量替换:令 $u=xy$,$x\pm y$,$x^2\pm y^2$,$\frac{y}{x}$,将捆绑在一起的两个量成为一个变量。

(2) 当方程的因变量转化为 $f(y)$ 时,则令 $u=f(y)$。

例6.6 用简单的变量替换,求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}=(4x+y)^2$; (2) $y'+\sin y+x\cos y+x=0$;

(3) $xy'-y[\ln(xy)-1]=0$; (4) $y'=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$。

解 (1) 令 $z=4x+y$,则$\frac{dz}{dx}=4+\frac{dy}{dx}$,从而有$\frac{dz}{dx}=4+z^2$,分离变量并积分 $\int\frac{dz}{4+z^2}=\int dx$,于是方程的通解为$\frac{1}{2}\arctan\frac{4x+y}{2}=x+C$。

(2) 将方程 $y'+\sin y+x\cos y+x=0$ 表示为 $y'+\sin y=-x(\cos y+1)$,于是

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}y'+\tan\frac{y}{2}=-x,$$

从而有$\left(\tan\frac{y}{2}\right)'+\tan\frac{y}{2}=-x$。令 $z=\tan\frac{y}{2}$,则有 $z'+z=-x$,此方程是一阶线性方程,有公式解

$$\tan\frac{y}{2}=z=e^{-\int dx}\left(\int -xe^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}(-xe^x+e^x+C)=-x+1+Ce^{-x},$$

所以方程的通解为 $y=2\arctan(-x+1+Ce^{-x})$。

(3) 令 $u=xy$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,从而有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y\ln u \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解方程 $\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|$,于是有 $\ln u=Cx$,即 $\ln xy=Cx$,所以方程的通解是 $y=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{Cx}$。

(4) 令 $u=\frac{y^2}{x}$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{2y}{x}\left(\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}\right)-\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{x}\tan u$,此方程是可分离变量的方程,从而有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}\sin u}{\sin u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分,得到 $\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|$,所以方程的通解是 $\sin\frac{y^2}{x}=Cx$,即 $y^2=x\arcsin Cx$。

关于变量替换的几点说明:

(1) 在变量替换中,应确定在替换中将哪个变量替换掉,是 x 还是 y。若是 x,应将 x,$\mathrm{d}x$ 被其他量所替换,若是 y,应将 y,$\mathrm{d}y$ 被其他量所替换。

(2) 在变量替换中,对等式不论是求微分还是求导,一般都是对积的形式进行,若等式是商的形式,应把它转化为积的形式,再求导数或微分。

(3) 在变量替换中,是求导还是求微分,要根据方程的形式确定。若方程用导数的形式表示,则求导;若方程用微分的形式表示,则求微分,这样有利于替换。

求一阶微分方程解的方法综述

求一阶微分方程的解,一定要确定此方程属于下列哪类方程:①可分离变量方程;②齐次方程;③一阶线性方程;④伯努利方程;⑤全微分方程。此方程是哪类方程,就用哪类方程的解法。

如果方程的表面形式不属于上述五类方程,通常做如下几种变化:

(1) 变形:将微分形式转化为导数形式,观察可否是一阶线性方程,齐次方程和伯努利方程;或将导数形式转化为微分形式,观察可否是可分离变量方程,全微分方程;

(2) 将 x 看作 y 的函数,将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$转化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,观察属于哪类方程。如例 6.3(2);

(3) 对把 x 和 y 被捆绑在一起的方程,如例 6.6,做适当变量替换。判断变换后方程所属类型。

总之,每类方程都有特有的解法,如果不能确定方程属于哪类方程,就没有办法求解方程。因此识别方程,变化方程以及牢记各类方程的求解方法是十分必要的。

练习题 6-1

1. 求下列变量可分离方程通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$;　　　　(2) $y'\tan x-y=a$;

(3) $y'=1+x+y^2+xy^2$；

(4) $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$。

2. 求下列齐次方程的通解：

(1) $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$；

(2) $(2xy+y^2)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$；

(3) $xy'+y=2\sqrt{xy}$；

(4) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$。

3. 求下列一阶线性方程的通解：

(1) $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$；

(2) $y'+y\tan x=\sin 2x$；

(3) $(y^2-6x)y'+2y=0$；

(4) $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$。

*4. 求下列伯努利方程的通解：

(1) $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$；

(2) $y'-y=xy^5$；

(3) $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$；

(4) $xy\mathrm{d}x=(2x^2-y^4)\mathrm{d}y$。

*5. 求下列全微分方程的通解：

(1) $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$；

(2) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$；

(3) $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)\mathrm{d}y=0$。

6. 用适当的变量替换求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos(x-y)$；

(2) $y+xy'=y(\ln x+\ln y)$；

(3) $y'=\frac{1}{x-y}+1$；

(4) $y'=\frac{x}{\cos y}-\tan y$。

6.2 二阶微分方程的解法

一、基本概念

定义 7 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)。\tag{1}$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，称方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\tag{2}$$

是方程(1)的相应的**齐次方程**。

定义 8 设 $y_1(x),y_2(x)$是某方程的两个解，如果存在两个不全为零的常数 α,β，使得 $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)=0$，则称 $y_1(x),y_2(x)$是两个线性相关的解，否则称是两个线性无关的解。

二、基本结论

定理 1(二阶线性微分方程解的结构定理)

1. 设 $y_1(x),y_2(x)$是齐次方程(2)的两个线性无关的解，则 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是齐次方程(2)的通解。

2. 设 $y_1(x),y_2(x)$是方程(2)的两个线性无关的解，$y^*(x)$ 是方程(1)的一个特解，则

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程(1)的通解。

3. 设 $y_1^*(x)$和 $y_2^*(x)$ 是方程(1)的两个解,则 $y(x)=y_1^*(x)-y_2^*(x)$是齐次方程(2)的解。

4. 设 $y_1^*(x)$,$y_2^*(x)$ 和 $y_3^*(x)$是方程(1)的三个线性无关的解,则方程(1)的通解可以写成(有多种写法)

$$y(x)=C_1[y_1^*(x)-y_2^*(x)]+C_2[y_1^*(x)-y_3^*(x)]+y_1^*(x)。$$

5. **叠加原理**:设 $y_1^*(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$一个解;$y_2^*(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$一个解,则 $y(x)=y_1^*(x)+y_2^*(x)$是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的一个解。

上述五个结论十分重要,一方面涉及方程解的结构,另一方面提供了二阶线性方程的求解方法。

三、基本方法

题型 7 求二阶常系数线性齐次方程的解

求二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的解基本方法:

二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,特征根是 λ_1和 λ_2:

(1) 如果 λ_1,λ_2是两个不等的实根,则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解是

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x};$$

(2) 如果 λ_1,λ_2是两个相等的实根,即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$,则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解是

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x};$$

(3) 如果 λ_1,λ_2是一对共轭复根,即 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$,则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解是

$$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)。$$

例 6.7 求下列二阶常系数线性齐次方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=0$;　　(2) $y''+6y'+13y=0$;

(3) $y''+y=0$;　　(4) $y''-4y'+4y=0$。

解 (1) 特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$,于是方程(1)的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}。$$

(2) 特征方程为 $\lambda^2+6\lambda+13=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=-3\pm2i$,于是方程(2)的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)。$$

(3) 特征方程为 $\lambda^2+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$,于是方程(3)的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x。$$

(4) 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=2$,于是方程(4)的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}。$$

题型 8 求二阶常系数线性非齐次方程的通解

求二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解基本方法:

根据解的结构,首先求出相应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解,设为

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x);$$

再求出非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解，设为 $y^*(x)$，从而二阶常系数线性非齐次方程的通解是 $y(x)=Y+y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$。

求二阶常系数线性非齐次方程的一个特解的基本方法：

情形 1　若 $f(x)=P_n(x)$，其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式

方程 $y''+py'+qy=P_n(x)$的特解的一般形式为

$$y^* = x^k R_n(x),$$

其中 k 可取 0,1 和 2，$R_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 是次数相同的多项式。

(1) 若 0 不是特征根，k 取 0，特解为 $y^*=R_n(x)$；

(2) 若 0 是特征根，且是单根，k 取 1，特解为 $y^*=xR_n(x)$；

(3) 若 0 是特征根，且是二重根，k 取 2，特解为 $y^*=x^2R_n(x)$。

例 6.8　求方程 $y''+y'=x^2$的通解。

解　相应的齐次方程为 $y''+y'=0$，其特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$，特征根为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=0$，于是相应的齐次方程的通解是 $Y=C_1+C_2e^{-x}$。

因为 0 是特征根，是单根，所以原方程的特解设为

$$y^* = x(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx,$$

代入原方程，得到 $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$，$c=2$。所以方程的特解是 $y^*=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$，方程的通解是 $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$。

情形 2　若 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$，其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式

方程 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}$ 的特解的一般形式为

$$y^* = x^k R_n(x)e^{\alpha x},$$

其中 k 可取 0,1,2，$R_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 是次数相同的多项式。

(1) 若 α 不是特征根，k 取 0，特解为 $y^*=R_n(x)e^{\alpha x}$；

(2) 若 α 是特征根，且是单根，k 取 1，特解为 $y^*=xR_n(x)e^{\alpha x}$；

(3) 若 α 是特征根，且是二重根，k 取 2，特解为 $y^*=x^2R_n(x)e^{\alpha x}$。

例 6.9　求方程 $y''-3y'+2y=xe^x$的通解。

解　特征方程是 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，相应的齐次方程的通解是

$$Y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

因为 1 是特征方程的特征根，是单根，所以原方程的特解设为

$$y^* = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x,$$

代入原方程得 $-2ax+2a-b=x$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-1$，所以方程的特解为

$$y^* = -\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^x,$$

于是方程的通解是 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^x$。

情形 3 若 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$，或 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$，或

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x),$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，$P_m(x)$ 是 m 次多项式，不妨设 $m\leqslant n$。

(1) 若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，特解为 $y^*=e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x)$，

(2) 若 $\alpha\pm i\beta$ 是特征根，特解为 $y^*=xe^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x)$，

其中 $R_n(x),Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 次数相同的多项式。

例 6.10 求方程 $y''+y=\sin x$ 通解。

解 特征方程是 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，对应的齐次方程的通解是

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x。$$

因为 $\pm i$ 是特征方程的特征根，所以原方程的特解设为

$$y^*=x(A\sin x+B\cos x),$$

代入原方程得到 $2A\cos x-2B\sin x=\sin x$，利用等式两端正弦系数与余弦系数相等，得到 $A=0,B=-\frac{1}{2}$，所以方程特解为 $y^*=-\frac{1}{2}x\cos x$。于是方程的通解是

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x。$$

需要指出的是：若特解 $y^*=e^{\alpha x}(xR_m(x)\cos\beta x+xQ_m(x)\sin\beta x)$ 中 $\alpha\neq0,\beta\neq0$，其中 $R_m(x),Q_m(x)$ 是 m 次多项式，将其代入原方程，求多项式 $R_m(x),Q_m(x)$ 中的未知系数，如果 $m\geqslant2$，计算量太大了，麻烦程度是不可想象的。为此我们介绍另外的一个求解方法：**复指数函数法**。

所谓复指函数法就是将 $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 表示为复指数函数

$$f(x)=P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}=P_n(x)e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

的实部或虚部。于是

(1) 若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，特解设为 $y^*=Q_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$；

(2) 若 $\alpha\pm i\beta$ 是特征根，特解设为 $y^*=xQ_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$。

其中 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 次数相同的 n 多项式。

将特解代入原方程中，求出 $Q_n(x)$ 的未知系数，然后将 $Q_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 或 $xQ_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 表示为

$$Q_n(x)e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad xQ_n(x)e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=\Delta_1+i\Delta_2$$

其中 Δ_1 就是自由项为 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 方程的特解，其中 Δ_2 就是自由项为 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 方程的特解。

例 6.11 求方程 $y''-y=xe^{2x}\sin x$ 的通解。

解 相应的齐次方程为 $y''-y=0$，特征方程是 $\lambda^2-1=0$，特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$。所以相应的齐次方程的通解是 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

方程右端 $f(x)=xe^{2x}\sin x$ 是复指数函数 $xe^{(2+i)x}=xe^{2x}(\cos x+i\sin x)$ 的虚部，故求特解可考虑方程 $y''-y=xe^{(2+i)x}$。

由于 $2+i$ 不是特征根，所以特解令为 $\bar{y}=(ax+b)e^{(2+i)x}$ 将其代入原方程中，并消去 $e^{(2+i)x}$ 得到

$$2a(2+i)+(ax+b)(2+i)^2-(ax+b)=x,$$

于是有 $a(2+4\mathrm{i})=1$，$2a(2+\mathrm{i})+b(2+4\mathrm{i})=0$，解得 $a=\frac{1}{10}-\mathrm{i}\frac{2}{10}$，$b=-\frac{2}{50}-\mathrm{i}\frac{11}{50}$，所以

$$\bar{y}=(ax+b)\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^{2x}\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{2}{50}\right)-\mathrm{i}\left(\frac{2}{10}x+\frac{11}{50}\right)\right](\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\left\{\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{2}{50}\right)\cos x+\left(\frac{2}{10}x+\frac{11}{50}\right)\sin x\right]+\mathrm{i}\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{2}{50}\right)\sin x-\left(\frac{2}{10}x+\frac{11}{50}\right)\cos x\right]\right\},$$

于是原方程的特解是

$$y^{*}=\mathrm{e}^{2x}\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{2}{50}\right)\sin x-\left(\frac{2}{10}x+\frac{11}{50}\right)\cos x\right],$$

所以原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2x}\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{2}{50}\right)\sin x-\left(\frac{2}{10}x+\frac{11}{50}\right)\cos x\right]。$$

情形 4　若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，表示为两项的和

利用叠加原理解此类方程，具体方法是：

若 $y''+py'+qy=f(x)$，其中 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，可以分别求出方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)\quad 和\quad y''+py'+qy=f_2(x)$$

的两个特解，这两个特解的和就是方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解。

例 6.12　求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解。

解　由于等式右端是两项的和，由叠加原理，方程的特解等于方程 $y''+y=x$ 与 $y''+y=\cos x$ 特解的和。

相应的齐次方程的特征方程是 $\lambda^2+1=0$，特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，于是齐次方程的通解是 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

设方程 $y''+y=x$ 的特解是 $y_1^*=Ax+B$，代入方程，解得 $A=1$，$B=0$。于是 $y_1^*=x$。

设方程 $y''+y=\cos x$ 的特解是 $y_2^*=x(C\cos x+D\sin x)$，代入方程得 $C=0$，$D=\frac{1}{2}$，于是 $y_2^*=\frac{1}{2}x\sin x$。由叠加原理知，方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x。$$

题型 9　求可降阶的二阶微分方程的解

二阶微分方程的一般形式是：$H(y'',y',y,x)=0$，即二阶方程一般含有 y'',y',y,x 四个变量，当缺少变量 y 或变量 x 时，此类方程是可以降阶的，即二阶方程可以转化为一阶方程。

类型 1　方程中缺少 y：$y''=f(x,y')$

基本解法　令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，原方程变为 $p'=f(x,p)$，解得 $p=p(x,C)$，于是

$$y=\int p(x,C)\mathrm{d}x。$$

例 6.13　求方程 $y''=y'+x$ 的通解。

解　令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，于是方程变为 $p'=p+x$，即 $p'-p=x$。此方程为一阶线性微分方程，所以

$$p=e^{\int dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C_1\right)=e^x\left(\int xe^{-x}dx+C_1\right)=-x-1+C_1e^x,$$

即 $y'=-x-1+C_1e^x$，于是方程的通解为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2$。

类型 2 方程中缺少 x：$y''=f(y,y')$

基本解法 令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}=pp'$，于是有 $pp'=f(y,p)$，解得 $p=p(y,C)$，即 $y'=p(y,C)$，再求 y。

例 6.14 求方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解。

解 令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}=pp'$，于是原方程化为 $ypp'-p^2=0$，即 $yp'-p=0$。此方程为可分离变量方程，即 $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$，此方程的解是 $p=C_1y$，即 $y'=C_1y$，所以方程的通解为 $y=C_2e^{C_1x}$。

求二阶微分方程的解方法综述

二阶方程分为三类：

(1) 二阶线性常系数齐次方程；

(2) 二阶线性常系数非齐次方程；

(3) 可降阶的二阶方程。

当然有些方程既是可降阶的二阶方程，又是二阶线性常系数齐次方程或二阶线性常系数非齐次方程。如 $y''+2y'+y=0$，$y''+2y'=x$。

一般情况下，当二阶方程中缺少变量 x 或 y 时，此方程就是可降阶的二阶方程。

1) 求二阶线性常系数齐次方程的通解：求其特征方程的特征根，根据特征根，得到方程的通解；

2) 求二阶线性常系数非齐次方程的通解：求相应齐次方程的通解，再求此方程一个特解，通解与特解的和就是此方程的通解；

3) 求可降阶的二阶方程的通解：

(1) 当二阶方程缺少 y 时，令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)=p'$，最后将方程转化为 x 和 p 的一阶方程，解此方程得到解为 $p=p(x,C_1)$，于是有 $y'=p(x,C_1)$，所以方程的解为

$$y=\int p(x,C_1)dx+C_2。$$

(2) 当二阶方程缺少 x 时，令 $y'=p(y)$，则 $y''=p'(y)y'=p'p$，最后将方程转化为 y 和 p 的一阶方程，解此方程得到解为 $p=p(y,C_1)$，于是有 $y'=p(y,C_1)$，所以方程的解为

$$\int\frac{1}{p(y,C_1)}dy=\int dx+C_2=x+C_2。$$

***题型 10 求 n 阶常系数线性齐次方程的解**

n 阶常系数线性齐次方程的一般形式：

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+p_{n-1}y'+\cdots+p_ny=0,$$

它的特征方程为 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$。

(1) 若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是特征方程的 n 个相异实根,则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

(2) 若 $\lambda=k$ 是特征方程的 m 重实根,通解中含有 m 项为

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) e^{kx};$$

(3) 若 $\lambda=\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的 m 重复数根,通解中含有 $2m$ 项为

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_m x^{m-1})\sin\beta x]。$$

例 6.15 求下列高阶方程的通解。

(1) $y^{(4)}-16y''=0$; (2) $y^{(3)}+y''-2y=0$;

(3) $y^{(5)}-8y''=0$; (4) $y^{(4)}-5y''-36y=0$。

解 (1) 特征方程为 $\lambda^4-16\lambda^2=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=0$(二重根), $\lambda_3=4$, $\lambda_4=-4$,于是方程的通解是 $y=C_1+C_2x+C_3e^{4x}+C_4e^{-4x}$。

(2) 特征方程为 $\lambda^3+\lambda^2-2=0$,特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=1\pm i$,于是方程的通解是

$$y = C_1 e^x + (C_2\cos x + C_3\sin x)e^x。$$

(3) 特征方程为 $\lambda^5-8\lambda^2=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=0$(二重根)及 $\lambda_{3,4,5}=2$(三重根),于是方程的通解是 $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x+C_5x^2)e^{2x}$。

(4) 特征方程为 $\lambda^4-5\lambda^2-36=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm3$, $\lambda_{3,4}=\pm2i$,于是方程的通解是

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{2x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x)。$$

题型 11 求函数的表达式

求函数的表达式,是高等数学的一类常见题型。常用方法:**建立微分方程**、**解方程**的方法,求函数表达式。

例 6.16 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的导数, $f(1)=2$,且

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = (x+1)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$的表达式。

解 令 $y=f(x)$,对变量 x 两次求导,得到

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-3x)y,$$

解方程得 $y=Cx^{-3}e^{-\frac{1}{x}}, x\in[0,1]$。因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续,所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}Cx^{-3}e^{-\frac{1}{x}}=0$,根据初始条件 $f(1)=2$,得到 $C=2e$,所以

$$f(x) = \begin{cases} 2ex^{-3}e^{-\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant1, \\ 0, & x=0。\end{cases}$$

例 6.17 设函数 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上具有连续导数,且

$$f(t) = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + t^4, \quad t>0,$$

求 $f(x)$的表达式。

解 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则

$$f(t) = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2 f(r)r\mathrm{d}r + t^4 = 4\pi\int_0^t r^2 f(r)r\mathrm{d}r + t^4。$$

对变量 t 求导，得到

$$f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3,\quad f(0)=0。$$

此方程为可分离变量方程，于是$\dfrac{f'(t)}{\pi f(t)+1}=4t^3$，两边积分得到$\displaystyle\int\frac{f'(t)}{\pi f(t)+1}\mathrm{d}t=\int 4t^3\,\mathrm{d}t$，因此$\dfrac{1}{\pi}\ln[\pi f(t)+1]=t^4+C$，根据 $f(0)=0$，解得 $C=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi x^4}-1)$。

例 6.18 设函数 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上有定义，对任意的 x,y 有

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{2y}f(x)+f(y)\cos x,$$

且 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=1$，求 $f(x)$ 的表达式。

解 根据已知，$f(0+0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$。根据导数定义

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2\Delta x}f(x)+f(\Delta x)\cos x-f(x)}{\Delta x}\\&=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2\Delta x}-1}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=2f(x)+\cos x f'(0)=2f(x)+\cos x。\end{aligned}$$

于是有 $f'(x)-2f(x)=\cos x$。此方程为一阶线性方程，于是通解为

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\left(\int\cos x\,\mathrm{e}^{\int -2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{2x}\left(\int\cos x\,\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{2x}\left[\frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)\mathrm{e}^{-2x}+C\right]。\end{aligned}$$

根据 $f(0)=0$，解得 $C=\dfrac{2}{5}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{5}(\sin x-2\cos x)+\dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}$。

例 6.19 设 $f(x)$是连续函数，且 $f(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式。

解 由 $f(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 得到，$f(x)=\mathrm{e}^x-x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，两边对变量 x 求导，得到 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。

两边再对变量 x 求导，得到 $f''(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$，此方程为二阶常系数线性非齐次方程，其通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x。$$

根据方程 $f(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，得 $f(0)=1$，根据方程 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，得 $f'(0)=1$。于是解得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)。$$

求函数表达式方法综述

求函数表达式，除了**复合方法，极限方法，积分方法**【求两个函数的复合函数；用极限表示的函数(例 1.27)，用积分表示的函数(例 3.23，练习题 3-2 的 9 题，例 9.15)】等题型外，绝大部分都是用**解方程**的方法求函数表达式的。用此类方法求函数表达式需要做两项工

作：一是建立微分方程，二是求微分方程的特解。

(1) **建立微分方程**：为了建立微分方程，通常都是对含有函数的等式，两边求导，特别是含有变限积分函数的等式。对含有二重积分、三重积分的等式一般都是将重积分化为累次积分，利用累次积分的性质，最终将重积分化为变限积分函数，再求导，建立微分方程。对不能直接对等式两端求导的题型，可考虑用定义求导函数，进而建立微分方程，如例6.19。

(2) **求微分方程的特解**：一般所求函数，不会是函数族，而是一个具体函数，所以通过建立微分方程，求出通解后，一定要确定通解中的任意常数。寻求初始条件：$x=?$，$f(x)=?$。有时初始条件在已知条件中就给出了，如例6.16，但大多数都需要去寻找，如例6.17～例6.19。

练习题 6-2

1. 求下列可降阶微分方程的通解：

(1) $y''=x+\sin x$；　　(2) $y''=1+(y')^2$；

(3) $y''=y'+x$；　　(4) $y''=(y')^3+y'$。

2. 求下列二阶线性常系数齐次方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=0$；　　(2) $y''-4y'=0$；

(3) $y''+y=0$；　　(4) $y''+2y'+y=0$。

3. 求下列高阶线性常系数齐次方程的通解：

(1) $y'''+6y''+13y'=0$；　　(2) $y^{(4)}-y=0$；

(3) $y^{(4)}+2y''+y=0$；　　(4) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$。

4. 求下列二阶线性常系数非齐次方程的通解：

(1) $y''+2y'+2y=x+3$；　　(2) $y''+2y'-3y=e^{-3x}$；

(3) $y''-3y'+2y=2e^x$；　　(4) $y''+3y'+2y=3\sin x$。

5. 已知连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求 $f(x)$。

6. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数，$f(0)=1$ 且有

$$f'(x)+3\int_0^x f'(t)dt+2x\int_0^1 f(tx)dt+e^{-x}=0,$$

求 $f(x)$。

7. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导，且 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$，求 $f(x)$。

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=e^{-x}+e^{-x}\int_0^x f^2(t)dt$，求 $f(x)$。

9. 设函数 $f(x)$ 可导，且对任何实数 a,b 满足：$f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a)$，且 $f'(0)=e$，求 $f(x)$。

10. 设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$。

11. 设函数 $f(x)$ 连续，$f(x)=x\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

***6.3　差分方程的解法

一、基本概念

定义 9　设函数 $f(x)$ 记为 y_x，当 x 取遍非负整数时，函数值可以排成一个数列

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_x, \cdots,$$

则称 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = f(x+1) - f(x)$ 为 y_x 的**一阶差分**。称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = y_{x+2} - y_{x+1} - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

为 y_x 的**二阶差分**；称 $\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = \Delta^{n-1} y_{x+1} - \Delta^{n-1} y_x$ 为 y_x 的 ***n* 阶差分**。

定义 10　表示未知函数 y_x，未知函数的差分 $\Delta y_x, \Delta^2 y_x, \Delta^3 y_x, \cdots, \Delta^n y_x, \cdots$ 及自变量关系的方程称为**差分方程**；称 $F(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n})$ 为 ***n* 阶差分方程**，其中 F 是已知函数，y_x, y_{x+n} 一定出现。出现在差分方程中未知函数下标的最大差，称为差分方程的**阶**。

定义 11　若函数 $y_x = \varphi(x)$ 代入差分方程中，使之成为恒等式，则称 $y_x = \varphi(x)$ 为差分方程的**解**；差分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数等于差分方程的阶数，这样的解称为差分方程的**通解**；满足某初始条件的解称为**特解**。

定义 12　一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性非齐次差分方程：

$$y_{x+1} + ay_x = \varphi(x); \tag{1}$$

一阶常系数线性齐次差分方程：

$$y_{x+1} + ay_x = 0。\tag{2}$$

定义 13　二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性非齐次差分方程：

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = f(x); \tag{3}$$

二阶常系数线性齐次差分方程：

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = 0。\tag{4}$$

二、基本结论

定理 2　一阶差分方程性质和解的结构：

(1) 若 $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}$ 都是方程(1)的解，则 $y_x^{(1)} - y_x^{(2)}$ 是方程(2)的解；

(2) 若 $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}$ 都是方程(2)的解，则 $C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)}$ 也是方程(2)的解；

(3) 若 $\overline{y}_x$ 是方程(2)的解，若 y_x^* 是方程(1)的解，则 $\overline{y}_x + y_x^*$ 是方程(1)的解；

(4) **叠加原理**：若 $y_x^{*(1)}$ 是 $y_{x+1} + ay_x = \varphi_1(x)$ 的解，$y_x^{*(2)}$ 是 $y_{x+1} + ay_x = \varphi_2(x)$ 的解，则 $y_x^{*(1)} + y_x^{*(2)}$ 是 $y_{x+1} + ay_x = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ 的解；

(5) **一阶线性齐次差分方程的通解**：方程(2)的特征方程是 $\lambda + a = 0$，则方程(2)的通解是 $Y_x = C(-a)^x$；

(6) **一阶线性非齐次差分方程的通解**：若 Y_x 是方程(2)的通解，若 y_x^* 是方程(1)的特解，则 $Y_x + y_x^*$ 是方程(1)的通解；

(7) **方程(1)特解 y_x^* 的形式**：设 $\varphi(x)=r^xP_m(x)$，$P_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式。

(i) 若 $r=1$：$r\neq -a$，特解为 $y_x^*=Q_m(x)$，$r=-a$，特解为 $y_x^*=xQ_m(x)$；

(ii) 若 $r\neq 1$：$r\neq -a$，特解为 $y_x^*=Q_m(x)r^x$；$r=-a$，特解为 $y_x^*=xQ_m(x)r^x$，其中 $Q_m(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m$ 是 m 次多项式。

定理3　二阶差分方程性质和解的结构：

(1) 若 $y_x^{(1)}$，$y_x^{(2)}$ 都是方程(3)的解，则 $y_x^{(1)}-y_x^{(2)}$ 是方程(4)的解。

(2) 若 $y_x^{(1)}$，$y_x^{(2)}$ 都是方程(4)的解，则 $C_1y_x^{(1)}+C_2y_x^{(2)}$ 是方程(4)的解。

(3) 若 $\bar{y}_x$ 是方程(4)的解，若 y_x^* 是方程(3)的解，则 $\bar{y}_x+y_x^*$ 是方程(3)的解。

(4) **叠加原理**：若 $y_x^{*(1)}$ 是 $y_{x+2}+ay_{x+1}+by_x=f_1(x)$ 的解，$y_x^{*(2)}$ 是 $y_{x+2}+ay_{x+1}+by_x=f_2(x)$ 的解，则 $y_x^{*(1)}+y_x^{*(2)}$ 是 $y_{x+2}+ay_{x+1}+by_x=f_1(x)+f_2(x)$ 的解。

(5) **二阶线性齐次差分方程的通解**：方程(4)的特征方程是 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，则若特征方程

(i) 有两个不等的实根 λ_1，λ_2，方程(4)的通解 $Y_x=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x$；

(ii) 有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$，方程(4)的通解 $Y_x=(C_1+C_2x)\lambda_1^x$；

(iii) 有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\lambda e^{\pm i\theta}$，方程(4)的通解 $Y_x=\lambda^x(C_1\cos\theta x+C_2\sin\theta x)$。

(6) **二阶线性非齐次差分方程的通解**：若 Y_x 是方程(4)的通解，若 y_x^* 是方程(3)的特解，则 $Y_x+y_x^*$ 是方程(3)的通解。

(7) **方程(3)的特解 y_x^* 形式**：设 $f(x)=r^xP_m(x)$，$P_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式。

(i) 若 r 不是特征方程的根，特解为 $y_x^*=Q_m(x)r^x$；

(ii) 若 r 是特征方程的单根，特解为 $y_x^*=xQ_m(x)r^x$；

(iii) 若 r 是特征方程的重根，特解为 $y_x^*=x^2Q_m(x)r^x$，其中 $Q_m(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m$ 是 m 次多项式。

注　若 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则 $\lambda_{1,2}=\lambda e^{\pm i\theta}$，其中 $\lambda=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，$\tan\theta=\dfrac{\beta}{\alpha}$。

题型12　求一阶差分方程的解

例6.20　求下列差分方程的通解：

(1) $2y_{x+1}+10y_x-5x=0$；　　(2) $y_{x+1}-\dfrac{1}{2}y_x=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$；

(3) $y_{x+1}-2y_x=x2^x$；　　(4) $y_{x+1}-y_x=x^22^x$。

解　(1) 原方程化为 $y_{x+1}+5y_x=\dfrac{5}{2}x$，其齐次方程为 $y_{x+1}+5y_x=0$，特征方程为 $\lambda+5=0$，齐次方程的通解为 $Y_x=C(-5)^x$。

由于 $r=1\neq -5$，所以特解设为 $y_x^*=Ax+B$，代入方程 $y_{x+1}+5y_x=\dfrac{5}{2}x$，得到

$$A(x+1)+B+5(Ax+B)=0,$$

解得 $A=\dfrac{5}{12}$，$B=-\dfrac{5}{72}$。所以此差分方程的通解为 $y_x=C(-5)^x+\dfrac{5}{12}x-\dfrac{5}{72}$。

(2) 原方程的齐次方程为 $y_{x+1}-\frac{1}{2}y_x=0$,特征方程为 $\lambda-\frac{1}{2}=0$,齐次方程的通解为 $Y_x=C\left(\frac{1}{2}\right)^x$。由于 $r=\frac{5}{2}\neq\frac{1}{2}$,所以特解设为 $y_x^*=A\left(\frac{5}{2}\right)^x$,代入方程 $y_{x+1}-\frac{1}{2}y_x=\left(\frac{5}{2}\right)^x$,得到

$$\left(\frac{5}{2}A-\frac{1}{2}A\right)\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^x,$$

解得 $A=\frac{1}{2}$。所以此差分方程的通解为 $y_x=C\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x$。

(3) 原方程的齐次方程为 $y_{x+1}-2y_x=0$,特征方程为 $\lambda-2=0$,齐次方程的通解为 $Y_x=C2^x$。由于 $r=2$ 是特征根,所以特解设为 $y_x^*=x(Ax+B)2^x$,代入原方程得到

$$[4Ax+2(A+B)]2^x=x2^x,$$

解得 $A=\frac{1}{4}$,$B=-\frac{1}{4}$,所以此差分方程的通解为 $y_x=C2^x+\frac{x}{4}(x-1)2^x$。

(4) 原方程的齐次方程为 $y_{x+1}-y_x=0$,特征方程为 $\lambda-1=0$,齐次方程的通解为 $Y_x=C$。由于 $r=2$ 不是特征根,所以特解设为 $y_x^*=(Ax^2+Bx+D)2^x$,代入原方程得到

$$Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+D)=x^2,$$

解得 $A=1$,$B=-4$,$D=6$。所以此差分方程的通解为 $y_x=C+(x^2-4x+6)2^x$。

例 6.21 求差分方程 $y_{x+1}-3y_x=3^x$ 满足条件 $y(1)=4$ 的解。

解 原方程的齐次方程为 $y_{x+1}-3y_x=0$,特征方程为 $\lambda-3=0$,齐次方程的通解为 $Y_x=C3^x$。

由于 $r=3$ 是特征方程的特征根,所以特解设为 $y_x^*=Ax3^x$,代入方程中得到 $3A3^x=3^x$,解得 $A=\frac{1}{3}$。所以此差分方程的通解为 $y_x=C3^x+\frac{1}{3}x3^x$。

根据 $y(1)=4$,解得 $C=1$。所以满足初始条件的解为 $y_x=\left(1+\frac{1}{3}x\right)3^x$。

题型 13 求二阶差分方程的解

例 6.22 求下列二阶线性常系数齐次差分方程的通解:

(1) $y_{x+2}+y_{x+1}-6y_x=0$;

(2) $y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x=0$;

(3) $y_{x+2}+4y_x=0$;

(4) $y_{x+2}-2y_{x+1}+2y_x=0$。

解 (1) 特征方程为 $\lambda^2+\lambda-6=0$,特征根为 $\lambda_1=-3$,$\lambda_2=2$,通解为 $y_x=C_1(-3)^x+C_22^x$。

(2) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=1$,通解为 $y_x=C_1+C_2x$。

(3) 特征方程为 $\lambda^2+4=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm2\mathrm{i}$,通解为 $y_x=2^x\left(C_1\cos\frac{\pi x}{2}+C_2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$。

(4) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$,通解为

$$y_x=2^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\pi x}{4}+C_2\sin\frac{\pi x}{4}\right)。$$

例 6.23 求差分方程 $y_{x+2}+5y_{x+1}+4y_x=x$ 的通解。

解 差分方程 $y_{x+2}+5y_{x+1}+4y_x=x$ 的相应齐次方程为 $y_{x+2}+5y_{x+1}+4y_x=0$,特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+4=0$,特征根是 $\lambda_1=-4$,$\lambda_2=-1$。于是齐次方程的通解是

$$Y_x=C_1(-4)^x+C_2(-1)^x。$$

由于 $r=1$ 不是特征根,所以令原方程的特解为 $y_x^*=ax+b$。代入原方程中,得到

$$a(x+2)+b+5[a(x+1)+b]+4(ax+b)=x,$$

于是有 $10a=1, 7a+10b=0$，解得 $a=\frac{1}{10}, b=-\frac{7}{100}$，所以原差分方程的通解为

$$y_x = C_1(-4)^x + C_2(-1)^x + \frac{1}{10}x - \frac{7}{100}。$$

例 6.24 设市场供给函数 S_t 和需求函数 Q_t 分别是 $S_t=-2+P_t, Q_t=7-2P_{t+1}$。求市场供需平衡时差分方程满足的条件 $P(0)=4$ 的特解，其中 P_t, P_{t+1} 分别为 $t, t+1$ 期价格，并求 $t\to+\infty$ 时的价格。

解 所谓供需平衡为 $S_t=Q_t$。于是有 $-2+P_t=7-2P_{t+1}$，即差分方程 $P_{t+1}+\frac{1}{2}P_t=\frac{9}{2}$。特征方程为 $\lambda+\frac{1}{2}=0$，所以齐次方程的通解为 $P_t=C\left(-\frac{1}{2}\right)^t$。

由于 $r=1$ 不是特征根，所以特解设为 $P_t^*=A$，代入方程中得到 $A+\frac{A}{2}=\frac{9}{2}$，解得 $A=3$。所以此差分方程的通解为 $y_t=C\left(-\frac{1}{2}\right)^t+3$。

根据 $P(0)=4$，解得 $C=1$，所以 $P_t=\left(-\frac{1}{2}\right)^t+3$。于是

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^t+3\right]=3。$$

6.4 常微分方程考研真题

一、常微分方程考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于常微分方程的考研数一真题共出了 24 道题，题型分布在：

1. 求一阶方程的解：共计 9 个题，分布在 2005 年，2006 年，2008 年，2011 年，2014 年(2 题)，2018 年和 2019 年(2 题)。

2. 求二阶方程的解：共计 7 个题，分布在 2004 年，2007 年，2009 年，2010 年，2015 年，2016 年和 2017 年。

3. 求函数表达式：共计 6 个题，分布在 2003 年，2004 年，2006 年，2012 年，2015 年和 2016 年。

4. 方程解的结构：共计 2 个题，分布在 2008 年和 2013 年。

1 常微分方程考研数一真题题型分析

1. 求一阶方程的解：2005 年，2011 年，2018 年和 2019 年考了求一阶线性方程的特解；2006 年，2008 年和 2019 年考了求可分离变量方程的特解；2014 年考了求一阶微分方程的特解及应用和齐次方程特解。

2. 求二阶方程的解：2004 年考了求欧拉方程特解；2007 年和 2010 年考了求二阶常系数线性非齐次方程的通解；2009 年考了确定二阶方程，并求特解；2015 年考了已知二阶线性非齐次方程的特解，求方程；2016 年考了求二阶常系数线性齐次方程的通解和特解，证明通

解的无穷积分收敛，并求特解无穷积分；2017 年考了求二阶常系数线性齐次方程的通解。

3. 求函数表达式：2003 年考了变换方程，建立二阶线性常系数非齐次方程，解方程，求函数表达式；2004 年考了建立一阶方程，求函数表达式；2006 年考了验证函数满足二阶线性齐次方程，解方程，求函数表达式；2012 年考了已知函数是两个方程的解，求函数表达式；2015 年考了用三曲线围成区域面积为 4 建立方程，解方程，求函数表达式；2016 年考了已知一阶方程两个特解，求一阶方程的系数(函数)。

4. 方程解的结构：2008 年考了三阶方程解的结构，已知通解确定方程，或方程所对应的通解；2013 年考了已知二阶常系数线性齐次方程特解，求通解。

2 常微分方程考研数一真题

1. (2003，七(12 分))设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$是 $y=y(x)$ 的反函数。

(i) 试将 $x=x(y)$所满足的微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2=0$ 变为 $y=y(x)$满足的微分方程；

(ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\dfrac{3}{2}$的解。

考点与解法：变换方程，求二阶线性常系数非齐次方程的特解。(i)计算$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$，从而得到变换后的方程；(ii)求二阶线性常系数非齐次方程的通解，根据初始条件，求特解。

2. (2004，一(2)(4 分))已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$且 $f(1)=0$，求 $f(x)$的表达式。

考点与解法：求函数表达式。建立微分方程，求方程的特解。

3. (2004，一(4)(4 分))求欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解。

考点与解法：求欧拉方程的解。令 $x=\mathrm{e}^t$，将其转化为二阶常系数线性齐次方程。

4. (2005，一(3)(4 分))求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足初始条件 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$的特解。

考点与解法：求一阶线性方程的解。利用一阶线性方程的求解公式。

5. (2006，一(2)(4 分))求微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解。

考点与解法：求可分离变量方程的解。分离变量，两边积分。

6. (2006，三(18)(12 分))设函数 $f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$满足等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$：

(i) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

(ii) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$，求函数 $f(u)$的表达式。

考点与解法：计算二阶偏导数和求二阶方程的特解。(i)求复合函数的二阶偏导数，代入方程中，得到(i)；(ii)利用变量可分离方法，求通解，再求特解。

7. (2007，二(13)(4 分))二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$的通解。

考点与解法：求二阶常系数线性非齐次微分方程的通解。求齐次方程的通解，再求非

齐次方程一个特解。

8. (2008,二(9)(4分))求微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解。

考点与解法：求一阶可分离变量方程的解。变量分离，求通解，根据初始条件，求特解。

9. (2008,一(3)(4分))下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$；　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$；

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$；　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$。

考点与解法：三阶线性常系数齐次方程的通解。根据通解，确定特征方程的特征根；或求特征方程的特征根，写出通解。

10. (2009,二(10)(4分))若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解是 $y=(C_1+C_2x)e^x$（C_1,C_2 为任意常数），求非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解。

考点与解法：求二阶常系数线性非齐次微分方程的特解。根据齐次方程的通解，确定 a,b 得到具体方程。再求一个特解，得到通解，根据初始条件，得到特解。

11. (2010,三(15)(10分))求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解。

考点与解法：求二阶常系数线性非齐次方程的通解。求相应齐次方程的通解，再求非齐次方程一个特解。

12. (2011,二(10)(4分))求微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解。

考点与解法：求一阶线性方程的特解。利用公式求一阶线性方程的通解，再根据初始条件，确定任意常数。

13. (2012,二(9)(4分))若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 和 $f''(x)+f(x)=2e^x$，求 $f(x)$。

考点与解法：求函数表达式。结合两个方程，得到一阶线性方程，求通解，代入某个方程中求特解。

14. (2013,二(10)(4分))已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次微分方程的3个解，求该方程的通解。

考点与解法：二阶方程解的结构。任意两个解的差是齐次方程的解，齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解的和就是非齐次方程的通解。

15. (2014,二(11)(4分))求微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足初始条件 $y(1)=e^3$ 的特解。

考点与解法：求齐次方程的解。化方程为齐次方程，求通解，再求特解。

16. (2014,二(10)(4分))设函数 $f(x)$ 是周期为4的可导函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，求 $f(7)$ 值。

考点与解法：求一阶方程的解。求方程的解，利用周期性，再求 $f(7)$。

17. (2015,一(2)(4分))设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次方程 $y''+by=ce^x$ 的一个特解，则：

(A) $a=-3,b=2,c=-1$；　　(B) $a=3,b=2,c=-1$；

(C) $a=-3,b=2,c=1$；　　(D) $a=-3,b=2,c=1$。

考点与解法：二阶方程的解的反问题。确定齐次方程的解，从而确定特征方程的根，进而得到系数 $a=-3,b=2$，再将特解代入方程，求出 $c=-1$。

18.（2015，三(16)(10分)）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于0，若对任意 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积为4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式。

考点与解法：求函数表达式。利用已知条件：三曲线围成区域的面积为4，建立方程，求解方程。

19.（2016，一(3)(4分)）若 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，求 $q(x)$。

考点与解法：求函数表达式。求出 $p(x)$，自然得到 $q(x)$。显然 y_1-y_2 是一阶线性齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，于是得到 $p(x)$，在将解代入方程中，从而求出 $q(x)$。

20.（2016，三(16)(10分)）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$：

(i) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

(ii) 若 $y(0)=1,y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值。

考点与解法：求二阶线性齐次方程的解（特解）、证明反常积分收敛和计算反常积分的值。(i) 求特征方程的特征根，求出通解 $y(x)$，计算 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值；(ii) 求出特解 $y(x)$，再计算 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$。

21.（2017，二(10)(4分)）求微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解。

考点与解法：求二阶线性常系数齐次方程的通解。根据特征方程，求特征根，得到通解。

22.（2018，三(19)(10分)）已知微分方程 $y'+y=f(x)$，$f(x)$ 是R上连续函数。

(i) 若函数 $f(x)=x$，求方程的通解；

(ii) 若 $f(x)$ 是一个周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解。

考点与解法：求一阶线性方程的通解和证明方程周期解存在且唯一。根据一阶线性方程的求解公式，求通解；利用通解公式和 $f(x)$ 是一个周期为 T 的函数，通解是以 T 为周期的函数所满足的条件，从而确定任意常数 C。

23.（2019，二(10)(4分)）求微分方程 $2yy'+y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解。

考点与解法：求一阶方程的特解。此方程式变量可分离方程，分离变量，两边积分。

24.（2019，三(15)(10分)）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的一个特解。

(i) 求函数 $y=y(x)$；

(ii) 求函数 $y=y(x)$ 的凸凹区间和拐点。

考点与解法：求一阶线性方程的特解，求凸凹区间和拐点。(i) 根据一阶线性方程的求解公式，求通解再利用初始条件求出特解 $y(x)$；(ii) 求函数 $y(x)$ 的二阶导数，用二阶导数等于0的点，分定义域为若干区间，从而得到凸凹区间和拐点。

二、常微分方程考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于常微分方程的考研数三真题共出了20道题，每年一题，填空和选择题居多，题型分布在：

1. 求一阶方程的解：共计4个题，分布在2005年，2007年，2008年和2019年。

2. 求二阶方程的解：共计2个题，分布在2013年和2015年。

3. 求函数表达式：共计9个题，分布在2003年，2004年，2009年，2011年，2012年，2014年，2015年，2016年和2018年。

4. 方程解的结构：共计3个题，分布在2006年，2010年和2019年。

5. 差分方程：共计2个题，分布在2017年和2018年。

1 常微分方程考研数三真题题型分析

1. 求一阶方程的解：2005年和2008年考了求可分离变量方程的特解；2007年考了求齐次方程的特解；2019年考了求一阶线性方程的解。

2. 求二阶方程的解：2013年考了求二阶线性常系数齐次方程的通解；2015年考了求二阶常系数线性齐次方程的特解(需要根据已知条件确定初始条件)。

3. 求函数表达式：2003年考了通过求函数的导数，寻求函数所满足的微分方程，解方程，求函数表达式；2004年考了通过对级数的和函数求导，寻求和函数所满足的微分方程，解方程，求函数表达式；2009年考了利用定积分的应用建立含变限积分函数的等式，对等式两边求导，建立微分方程，解方程，求函数表达式；2011年考了变换二重积分，使其成为含有变限积分函数的等式，对等式两边求导，建立微分方程，解方程，求函数表达式；2012年考了根据方程建立一阶方程，解方程，求函数表达式；2014年考了根据函数满足方程，建立一阶微分方程，解方程，求函数表达式；2015年考了根据实际问题建立等式，从而建立方程，解方程，求函数表达式；2016年考了对等式求导，建立方程，解方程，求函数表达式；2018年考了用定义建立方程，求函数表达式。

4. 方程解的结构：2006年和2010年考了一阶线性方程解的结构；2019年考了已知方程的通解，求方程。

5. 差分方程：2017年考了求一阶差分方程的解；2018年考了求二阶差分方程的通解。

2 常微分方程考研数三真题

1. (2003，七(9分))设$F(x)=f(x)g(x)$，其中函数$f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,\infty)$上满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$且$f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$。

(i) 求$F(x)$所满足的一阶微分方程； (ii) 求出$F(x)$的表达式。

考点与解法：建立微分方程，并求方程的解。(i)求$F'(x)$，利用$f(x)+g(x)=2e^x$，确定$F'(x)$，$F(x)$所满足的方程；(ii)根据(i)建立的方程，求一阶线性方程的解。

2. (2004，三(19)(9分))设级数$\frac{x^4}{2\times4}+\frac{x^6}{2\times4\times6}+\frac{x^8}{2\times4\times6\times8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$的和函数为$S(x)$，求：(i)$S(x)$所满足的一阶微分方程；(ii)$S(x)$的表达式。

考点与解法：建立微分方程，并求方程的解。(i)求$S'(x)$，确定$S'(x)$，$S(x)$所满足的方程；(ii)根据(i)建立的方程，求一阶线性方程的解。

3. (2005,一(2)(4 分))求微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解。

考点与解法:求变量可分离方程的解。分离变量,求通解,根据初始条件,求特解。

4. (2006,二(10)(4 分))设非齐次微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 有两个不同解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解为

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$; (B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$;

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$; (D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$。

考点与解法:方程解的结构。两解的差是相应的齐次方程的解,齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解的和,就是非齐次方程的通解。

5. (2007,二(14)(4 分))求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y(1)=1$ 的特解。

考点与解法:求齐次方程的特解。化齐次方程为变量可分离方程,求通解,再求特解。

6. (2008,二(12)(4 分))题目同上小节 8. (2008,二(9)(4 分))题。

7. (2009,二(19)(10 分))设曲线 $y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是可导函数,且 $f(x)>0$。已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$,$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积的 πt 倍,求该曲线的方程。

考点与解法:建立方程,求方程的解。利用曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积等于曲边梯形面积的 πt 倍建立等式,两边求导,建立一阶线性方程,求解。

8. (2010,一(2)(4 分))设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$; (B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$;

(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$; (D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$。

考点与解法:方程解的性质。根据已知条件可推出:$\lambda+\mu=1$,$\lambda-\mu=0$。

9. (2011,三(19)(10 分))设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$ 且满 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$,$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$,求 $f(x)$ 的表达式。

考点与解法:求函数表达式。将 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy$ 化为变限积分函数,$\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$ 等于 $f(t)\,\overline{D_t}$,求导,建立一阶方程(可分离变量),求解方程。

10. (2012,二(19)(10 分))已知函数 $f(x)$ 满足方程

$$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0,\quad f''(x)+f(x)=2e^x。$$

(i) 求 $f(x)$ 表达式;(ii) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点。

考点与解法:求函数表达式和曲线拐点。(i)结合两个方程,得到一阶线性方程,求通解,代入某个方程中求特解;(ii)根据 $f(x)$ 的表达式,求二阶导数等于 0 的点,求曲线的拐点。

11. (2013,二(12)(4 分))求微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解。

考点与解法：求二阶常系数线性齐次方程的通解。求特征方程的特征根，根据特征根写出通解。

12．(2014，三(12)(10 分))设函数 $f(u)$具有连续导数，且 $z=f(e^x\cos y)$满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x。$$

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$的表达式。

考点与解法：计算偏导数，求函数表达式。求函数的偏导数，建立微分方程，求方程的特解。

13．(2015，二(12)(4 分))设函数 $y=f(x)$是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，求 $f(x)$。

考点与解法：求二阶方程的特解。求 $y''+y'-2y=0$ 的通解，根据已知条件，确定初始条件：$f(0)=3$，$f'(0)=0$，再求特解。

14．(2015，三(18)(10 分))设函数 $f(x)$在定义域 I 上的导数大于 0，若对任意 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$的表达式。

考点与解法：求函数表达式。利用已知条件：三曲线围成区域的面积为 4，建立方程，求解方程。

15．(2016，三(18)(10 分))设函数 $f(x)$连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+e^{-x}-1。$$

求 $f(x)$的表达式。

考点与解法：求变限积分函数的导数，求函数表达式。求变限积分函数的导数，建立微分方程，求方程的特解。

16．(2017，二(10)(4 分))求差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解。

考点与解法：求差分方程的通解。求一阶差分方程的通解。

17．(2018，二(11)(4 分))求差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的通解。

考点与解法：求二阶差分方程的通解。求齐次方程的通解，再求非齐次方程的一个特解。

18．(2018，二(12)(4 分))设函数 $f(x)$满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$且 $f(0)=2$，则 $f(1)=$__________。

考点与解法：求 $f(x)$的表达式。利用导数定义建立微分方程，即等式两边同除 Δx，建立微分方程，求出特解，从而求出 $f(1)$的函数值。

19．(2019，一(3)(4 分))已知 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解是 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则 a，b，c 依次为

(A) 1，0，1；　　(B) 1，0，2；　　(C) 2，1，3；　　(D) 2，1，4。

考点与解法：根据方程的解求方程。根据通解知－1 是特征方程的二重根，解得 $a=2$，$b=1$。将特解 $y=e^x$ 代入方程，确定 c 的值。

20．(2019，三(17)(10 分))已知 $y=y(x)$是方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且满足 $y(1)=\sqrt{e}$的

一个特解

(i) 求函数 $y=y(x)$；

(ii) 若 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求平面区域 D 绕 x 旋转成的旋转体的体积。

考点与解法：求一阶线性方程的特解，求旋转体的体积。(i)根据一阶线性方程的求解公式，求通解，再利用初始条件求出特解 $y(x)$；(ii)利用旋转体的体积公式 $V_x=\pi\int_1^2 y^2(x)\mathrm{d}x$，计算旋转体的体积。

6.5 本章练习题答案与提示

练习题 6-1 答案与提示

1. (1) $y=\mathrm{e}^{Cx}$。提示：分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$，积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}y}{x}$，$\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln|C|$，于是 $y=\mathrm{e}^{Cx}$。

(2) $y=C\sin x-a$。提示：分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{\tan x}$，积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y+a}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，$\ln|y+a|=\ln|\sin x|+\ln|C|$，于是 $y=C\sin x-a$。

(3) $\arctan y=x+\frac{1}{2}x^2+C$。提示：分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$，积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int(1+x)\mathrm{d}x$，于是 $\arctan y=x+\frac{1}{2}x^2+C$。

(4) $\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=-2\sin\frac{x}{2}+C$。提示：整理得 $y'=-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$，分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{\sin\frac{y}{2}}=-2\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$，积分得 $\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=-2\sin\frac{x}{2}+C$。

2. (1) $y=x+Cx^2$。提示：整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\frac{y}{x}-1$，令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{u-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\ln|u-1|=\ln|x|+\ln|C|$，于是 $y=x+Cx^2$。

(2) $3xy^2+y^3=C$。提示：整理得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{2xy+y^2}{y^2}=-2\frac{x}{y}-1$，令 $u=\frac{x}{y}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{-3u-1}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，积分得 $-\frac{1}{3}\ln|-3u-1|=\ln|y|+\ln|C|$，即 $3xy^2+y^3=C$。

(3) $\sqrt{xy}=x-C$。提示：整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=2\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $-2\frac{\mathrm{d}(1-\sqrt{u})}{1-\sqrt{u}}=2\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\ln|1-\sqrt{u}|=-\ln|x|+\ln|C|$。

(4) $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$。提示：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解为 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$。

3. (1) $y=(x+C)\mathrm{e}^{-x}$。提示：公式解 $y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$。

(2) $y=C\cos x-2\cos^2 x$。提示：公式解

$$y=e^{\int -\tan x dx}\left(\int \sin 2x e^{\int \tan x dx}dx+C\right)=\cos x\left(\int \sin 2x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+C\right)$$
$$=\cos x(-2\cos x+C)=C\cos x-2\cos^2 x。$$

(3) $x=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$。提示：整理变形为 $x'-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$，根据一阶线性方程的公式解，

$$x=e^{\int \frac{3}{y}dy}\left(-\int \frac{1}{2}ye^{\int -\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=y^3\left(-\int \frac{1}{2}y^{-2}dy+C\right)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3。$$

(4) $x=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$。提示：整理变形为 $x'-x\cos y=\sin 2y$，于是方程有公式解，其通解为

$$x=e^{\int \cos y dy}\left(\int \sin 2y e^{\int -\cos y dy}dy+C\right)=e^{\sin y}\left(\int \sin 2y e^{-\sin y}dy+C\right)=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)。$$

4. (1) $\frac{1}{y}=-\sin x+Ce^x$。提示：令 $z=y^{1-n}=\frac{1}{y}$，则 $z'-z=\sin x-\cos x$，公式解

$$\frac{1}{y}=e^{\int dx}\left(\int(\sin x-\cos x)e^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx+C\right)=-\sin x+Ce^x。$$

(2) $\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}$。提示：令 $z=y^{1-n}=\frac{1}{y^4}$，则 $z'+4z=-4x$，公式解为

$$\frac{1}{y^4}=e^{\int -4dx}\left(\int -4xe^{\int 4dx}dx+C\right)=e^{-4x}\left(\int -4xe^{4x}dx+C\right)=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}。$$

(3) $\sqrt{y}=\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right)x^2$。提示：令 $z=y^{1-n}=\sqrt{y}$，则 $z'+\frac{2}{x}z=-\frac{1}{2}x$，公式解为

$$\sqrt{y}=e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{1}{2}xe^{\int -\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx+C\right)=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)x^2。$$

(4) $x^2=(-2\ln y+C)y^4$。提示：整理为$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-x^{-1}y^3$，令 $z=x^{1-n}=x^2$，则有 $z'-\frac{4}{y}z=-2y^3$，公式解为 $x^2=e^{\int \frac{4}{y}dy}\left(-\int 2y^3e^{\int -\frac{4}{y}dy}dy+C\right)=y^4\left(-2\int \frac{1}{y}dx+C\right)=(-2\ln y+C)y^4$。

5. (1) $(x^2-1)(y^2-1)=C$。提示：利用分组凑微分法 $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=(xy^2dx+yx^2dy)-xdx-ydy=d\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$，于是通解 $x^2y^2-x^2-y^2=C$。

(2) $xe^y-y^2=C$。提示：利用分组凑微分法

$$e^ydx+(xe^y-2y)dy=e^ydx+xe^ydy-2ydy=d(xe^y)-dy^2=d(xe^y-y^2)。$$

(3) $(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)y=C$。提示：可以考虑分组凑微分法

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy$$
$$=\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}dx+\sqrt{1+x^2}dy+2xydx+$$
$$x^2dy-\frac{y}{x}dx-\ln xdy=d\left(y\sqrt{1+x^2}\right)+d\left(x^2y\right)-d\left(y\ln x\right);$$

或特殊路径积分法，可以验证此方程为全微分方程，于是全微分函数

$$u(x,y)=\int_1^x 0\cdot dx+\int_0^y(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy=(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)y。$$

6. (1) $x+\cot\frac{x-y}{2}=C$。提示：令 $u=x-y$，则 $u'=1-y'$，即$\frac{du}{dx}=1-\cos u$，分离变量$\frac{du}{1-\cos u}=dx$，两边积分得$\int\frac{du}{1-\cos u}=\int\frac{du}{2\sin^2\frac{u}{2}}=\int dx$，有$-\cot\frac{u}{2}=x+C$。

(2) $xy=e^{Cx}$。提示：令 $u=xy$；则 $u'=y+xy'$，即$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\ln u$，分离变量得$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$，两边积分得

$\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|$，于是有 $xy=e^{Cx}$。

(3) $(x-y)^2=-2x+C$。提示：令 $u=x-y$；则 $u'=1-y'$，即 $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u}$，分离变量 $udu=-dx$，两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=-x+C$。

(4) $\sin y=Ce^{-x}+x-1$。提示：方程可化为 $y'\cos y=x-\sin y$，即 $(\sin y)'+\sin y=x$。可以看作关于因变量 $\sin y$ 的一阶线性方程，公式解为

$$\sin y=e^{\int -dx}\left(\int xe^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+C\right)=Ce^{-x}+x-1。$$

练习题 6-2 答案与提示

1. (1) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$。提示：两次积分，求出方程的通解。

(2) $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$。提示：令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，于是方程化为 $p'=1+p^2$，$\frac{1}{1+p^2}dp=dx$，$\arctan p=x+C_1$，$p=\tan(x+C_1)$，即 $y'=\tan(x+C_1)$，积分得到 $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$。

(3) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$。提示：令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，有 $p'-p=x$。此方程为一阶线性方程，公式解为

$$y'=e^{\int dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C_1\right)=e^{x}\left(\int xe^{-x}dx+C_1\right)=e^{x}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)=C_1e^{x}-x-1,$$

所以方程通解为 $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$。

(4) $y=\arcsin(C_1e^x)+C_2$。提示：令 $y'=p(y)$，则 $y''=p'p$，于是方程化为 $p'p=p^3+p$，显然 $y'=0$，即 $y=x+C$ 是方程的一个解。$p'=p^2+1$，解得 $\arctan p=y+C$，所以 $y'=\tan(y+C)$，$\frac{\cos(y+C)}{\sin(y+C)}dy=dx$，积分得到 $\ln|\sin(y+C_1)|=x+C$，$\sin(y+C_1)=C_2e^x$，即 $y=\arcsin(C_2e^x)-C_1$，其中 $C_2=\pm e^C$。

2. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$。提示：特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，所以方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$。

(2) $y=C_1+C_2e^{4x}$。提示：特征方程为 $\lambda^2-4\lambda=0$，特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4$，所以方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}$。

(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$。提示：特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，所以方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

(4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$。提示：特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-1$，所以方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$。

3. (1) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+C_3$。提示：特征方程为 $\lambda^3+6\lambda^2+13\lambda=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-3\pm 2i,\lambda_3=0$，所以通解为 $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+C_3$。

(2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$。提示：特征方程为 $\lambda^4-1=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=\pm 1,\lambda_{3,4}=\pm i$，所以方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$。

(3) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$。提示：特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，所以通解为 $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$。

(4) $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$。提示：特征方程为 $\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=0,\lambda_{3,4}=1$，所以方程的通解为 $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$。

4. (1) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}x+1$。提示：相应的齐次方程为 $y''+2y'+2y=0$，特征方程为

$\lambda^2+2\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=-1\pm i$，相应的齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$。由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以设特解为 $y^*=ax+b$，将其代入方程中，有 $2a+2ax+2b=x+3$，利用多项式恒等，系数相等，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$。所以特解为 $y^*=\frac{1}{2}x+1$，通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}x+1$。

(2) $y=C_1e^x\cos x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$。提示：相应的齐次方程为 $y''+2y'-3y=0$，特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$，特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-3$，齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x\cos x+C_2e^{-3x}$。由于 $\lambda=-3$ 是特征根，所以设特解为 $y^*=xAe^{-3x}$，将其代入原方程中，解得 $A=-\frac{1}{4}$。所以特解为 $y^*=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$，方程的通解为 $y=C_1e^x\cos x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$。

(3) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$。提示：相应的齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$，特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，相应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$。由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，所以设特解为 $y^*=Axe^x$，将其代入方程中，解得 $A=-2$。所以特解为 $y^*=-2xe^x$，通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$。

(4) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$。提示：相应的齐次方程为 $y''+3y'+2y=0$，特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，相应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$。由于 $\lambda=\pm i$ 不是特征方程的根，所以特解设为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，将其代入方程中，利用恒等，正弦和余弦系数相等，解得 $A=-\frac{9}{10}$，$B=\frac{3}{10}$。所以特解为 $y^*=-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$，通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$。

5. $3e^{3x}-2e^{2x}$。提示：求导 $f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$，即 $f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$，此方程为一阶线性方程，有公式解，通解为

$$f(x)=e^{\int 3dx}\left(\int 2e^x e^{\int -3dx}dx+C\right)=e^{3x}\left(\int 2e^{-x}dx+C\right)=e^{3x}\ (-2e^{-x}+C)=Ce^{3x}-2e^{2x}。$$

由于 $f(0)=1$，所以 $C=3$，所以函数 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$。

6. $f(x)=e^{-2x}+xe^{-x}$。提示：由于 $x\int_0^1 f(tx)dt=\int_0^x f(u)du$，所以方程可化为 $f'(x)+3\int_0^x f'(t)dt+2\int_0^x f(t)dt+e^{-x}=0$，两边求导，得到 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=e^{-x}$，此方程相应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$，令特解为 $y^*=Axe^{-x}$，代入方程中，解得 $A=1$，于是原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+xe^{-x}$，根据 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，解得 $C_1=0$，$C_2=1$。

7. $f(x)=\ln x+1$。提示：整理得 $xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$，求导 $f'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $f(x)=\ln x+C$，根据 $f(1)=1$，得 $C=1$，所以 $f(x)=\ln x+1$。

8. $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$。提示：$e^xf(x)=1+\int_0^x f^2(t)dt$，求导 $f'(x)+f(x)=e^{-x}f^2(x)$，此方程为伯努利方程，令 $z=f^{1-n}(x)=f^{-1}(x)$，则 $z'-z=-e^{-x}$，所以

$$\frac{1}{f(x)}=e^{\int dx}\left(-\int e^{-x}e^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(-\int e^{-2x}dx+C\right)=e^x\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+C\right),$$

根据 $f(0)=1$，得 $C=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$。

9. $f(x)=xe^{x+1}$。提示：根据已知，取 $a=b=0$，得 $f(0)=0$，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^xf(\Delta x)+e^{\Delta x}f(x)-f(x)}{\Delta x}\\&=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^xf'(0)+f(x)=e^{x+1}+f(x)。\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^{x+1}$，此方程为一阶线性方程，有公式解，通解为

$$f(x)=e^{\int dx}\left(\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\ (ex+C),$$

由 $f(0)=0$,得 $C=0$。于是 $f(x)=xe^{x+1}$。

10. $f(x)=2+Cx$。提示:令 $xt=u$,则 $\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=\frac{1}{2}f(x)+1$,整理得 $\int_0^x f(u)du=\frac{1}{2}xf(x)+x$,求导得 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x}$,一阶线性方程,公式解为

$$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int-\frac{2}{x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(\int-\frac{2}{x^2}dx+C\right)=x\left(\frac{2}{x}+C\right)=2+Cx。$$

11. $f(x)=\frac{1}{4}(x^2\cos x+3x\sin x)$。提示:对原方程两次求导,得到方程 $y''+y=-x\sin x+2\cos x$,且满足 $y(0)=0,y'(0)=0$。相应的齐次方程为 $y''+y=0$,特征方程为 $\lambda^2+1=0$,特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$,齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,特解设为 $y^*=x(Ax+B)\cos x+x(Cx+D)\sin x$,代入方程中,得到

$$2A\cos x-2(2Ax+B)\sin x+2C\sin x+2(2Cx+D)\cos x=-x\sin x+2\cos x,$$

于是 $-2(2Ax+B)+2C=-x,2A+2(2Cx+D)=2$,解得 $A=\frac{1}{4},B=0,C=0,\ D=\frac{3}{4}$。通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{3}{4}x\sin x$,根据初始条件 $y(0)=0,y'(0)=0$。得到 $C_1=C_2=0$。于是

$$f(x)=\frac{1}{4}(x^2\cos x+3x\sin x)。$$

考研真题答案

数一真题答案:1. (i) $y''-y'=\sin x$,(ii) $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$; 2. $\frac{1}{2}(\ln x)^2$; 3. $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$; 4. $y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$; 5. $y=Cxe^{-x}$; 6. (i) 略,(ii) $f(u)=\ln u$; 7. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$; 8. $\frac{1}{x}$; 9. D; 10. $y=x(1-e^x)+2$; 11. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$; 12. $y=e^{-x}\sin x$; 13. e^x; 14. $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$;

15. $y=xe^{2x+1}$; 16. 1; 17. A; 18. $f(x)=\frac{8}{4-x}$; 19. $3x(1+x^2)$; 20. (i) 略,(ii) $\frac{\sqrt{1-k}}{k}$;

21. $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$; 22. (i) $y=Ce^{-x}+x-1$,(ii) 略; 23. $y=\sqrt{3e^x-2}$;

24. (i) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$,(ii) 拐点为 $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$。

数三真题答案:1. (i) $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$,(ii) $F(x)=e^{2x}+Ce^{-2x}$; 2. (i) $S'(x)=xS(x)+\frac{1}{2}x^3$, $S(0)=0$; (ii) $S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$; 3. $y=\frac{2}{x}$; 4. B; 5. $y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$; 6. $y=\frac{1}{x}$; 7. $3x=\frac{1}{\sqrt{y}}+2y$; 8. A; 9. $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$; 10. (i) $f(x)=e^x$, (ii) (0,0); 11. $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}}$; 12. $f(u)=\frac{1}{16}(e^{4u}-4u-1)$; 13. $f(x)=e^{-2x}+2e^x$; 14. $f(x)=\frac{8}{4-x}$; 15. $f(x)=-\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$; 16. $y=C2^t+\frac{1}{2}t2^t$; 17. $y_x=C_1+C_2(-1)^x+\frac{5}{2}x$; 18. $f(1)=2e$; 19. D; 20. (i) $y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$,(ii) $V_x=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$。

第7章

无穷级数

基本概念

1. 数项级数、数项级数收敛、数项级数发散、数项级数的和；
2. 正项级数、交错级数、任意项级数；
3. 绝对收敛、条件收敛；
4. 函数项级数、幂级数、收敛半径、收敛区间、收敛域；
5. 和函数；
6. 泰勒级数、麦克劳林级数；

*7. 傅里叶级数、正弦级数、余弦级数。

基本结论

1. 等比级数(几何级数)、p-级数的敛散性；
2. 两级数的敛散性与两级数一般项和或差的级数敛散性的关系；
3. 正项级数收敛的充要条件；
4. 幂级数及幂级数的和函数的性质；

*5. 傅里叶级数收敛定理。

基本方法

1. 判别正项级数的敛散性；
2. 判别交错级数的敛散性；
3. 判别任意项级数的敛散性；
4. 求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域；
5. 求幂级数的和函数；
6. 求数项级数的和；
7. 函数展成麦克劳林级数；
8. 函数展成泰勒级数；

*9. 傅里叶级数的收敛域与傅里叶级数在一点的和；

*10. 函数展成傅里叶级数；

*11. 函数展成正弦级数和余弦级数；

*12. 函数展成一般周期的傅里叶级数。

7.1 数项级数敛散性的判别方法

一、基本概念

定义 1 级数收敛 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于S,即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛**,并称S是**级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和**,即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$;若部分和数列$\{S_n\}$发散,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**发散**;级数的收敛性与发散性统称为**敛散性**。

定义 2 正项级数 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$中的每一项$u_n\geqslant 0$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**正项级数**。

定义 3 交错级数 若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$中的$u_n>0$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$为**交错级数**。

定义 4 绝对收敛 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**绝对收敛**;绝对收敛级数的本身也收敛。

定义 5 条件收敛 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**条件收敛**。

二、基本结论

定理 1 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是两个数项级数:

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$收敛;

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$一个收敛,另一个发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$一定发散;

(3) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散,$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$敛散性不确定;

(4) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$绝对收敛;

(5) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$一个绝对收敛,另一个条件收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$条件收敛;

(6) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是条件收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$一定收敛,但其绝对收敛还是条件收敛不确定;

(7) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛,则由所有正项构成的级数和负项构成的级数都是发散的;特别地,若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛,则由偶数项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 和奇数项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -u_{2n-1}$ 都是发散的。

定理 2　两个重要级数的敛散性

(1) **等比级数(几何级数)敛散性**　当等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的公比的绝对值 $|q|<1$ 时,等比级数收敛,其和等于1减公比分之首项,即 $\frac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant 1$ 时,等比级数发散。

(2) **p-级数(广义调和级数)敛散性**　p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,当 $p>1$ 时,p-级数收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,p-级数发散。特别地,当 $p=1$ 时,调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

定理 3(级数的敛散性与有限项无关性)　改变、去掉、添加级数的有限项,不影响(改变)级数的敛散性,但会改变收敛级数的和。

定理 4(正项级数收敛的充要条件)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是:它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

三、基本方法

题型 1　判别正项级数的敛散性

判别正项级数敛散性有三个方法:比较法,比值法和根值法。

一、比较判别法

1. **不等式形式**　若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足:

$$u_n \leqslant v_n, \quad 或 \quad u_n \leqslant kv_n, \quad k>0, \quad n>N。$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

注 1　对正项级数而言,若级数收敛,其和是一个常数,若级数发散,其和是正无穷大,而一般级数发散却不具有这样性质。于是在证明正项级数收敛时,往往利用正项级数收敛的充要条件,考虑证明级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界即可。

注 2　根据 $u_n\leqslant v_n$,我们可以说 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是较小级数,而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是较大级数,于是比较判别法可大致表述为:对正项级数而言,较大级数收敛,较小级数一定收敛;较小级数发散,较大级数一定发散。

2. **极限形式**　若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $(v_n\neq 0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,则:

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时(非零常数)，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性；

(2) 当 $l=0$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

二、比值判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则：

当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散。

三、根值判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则：

当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散。

注 在应用根植判别法时，常常用到下面极限公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_m(n)}=1,$$

其中 $P_m(n)$是关于 n 的 m 次多项式，m 是有限数。例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^8-3n^6+10n+16}=1$。

例 7.1 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\dfrac{1}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2\right)$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$。

解 (1) 一般项含有 $n!$，利用比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

所以此级数收敛。

(2) 尽管一般项含有 n 次方，但运用根值法又无法计算，于是利用一般项等价无穷小转换。由于 $2^n\sin\dfrac{1}{3^n}\sim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 具有相同的敛散性，而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以所求级数收敛。

(3) 级数一般项作等价无穷小转换，$1-\cos\dfrac{\pi}{n}\sim\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 具有相同的敛散性，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以所求级数收敛。

(4) 一般项含有 n 次方，利用根值判别法：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，所以此级

数收敛。

(5) 利用比较判别法：根据一般项特点，此题只能用比较法。由于 p- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 中的 p 不论取什么数值，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\Big/\frac{1}{n^p}$ 都不可能是非零常数，于是只能考虑使其极限是 0 或 $+\infty$。若使其极限是 0，只能选 $1<p<2$，满足比较判别法极限形式的定理(2)，于是考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\Big/\frac{1}{n^{3/2}}=0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以所求级数收敛。

(6) 对级数的一般项作等价无穷小转换：因为 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同的敛散性，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以所求级数发散。

(7) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=1$，所以 $e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2\sim\frac{1}{n^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 具有相同的敛散性，显然所求级数收敛。

(8) 由于 $n^{\frac{1}{n}}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 具有相同的敛散性，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散，所以所求级数发散。

判别正项级数敛散性方法综述

(1) 一般情况下，如果一般项含有 $n!$，运用比值判别法；如果不含有 $n!$，而含有 n 次方，运用根值判别法(也可以用比值判别法)；既不含有 $n!$，又不含有 n 次方，只能应用比较判别法。

(2) 如果级数的一般项不是无穷小量(极限不等于 0)，此级数一定发散。

(3) 若级数的一般项是无穷小量，但又没办法用比较法、比值判别法和根值判别法，常常做无穷小等价转化，或同阶转化，即

$$u_n\sim v_n \quad \text{或} \quad u_n=O(v_n),$$

此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 具有相同的敛散性，然后再研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性。

题型 2 判别交错级数的敛散性

判别交错级数的敛散性常用方法——莱布尼茨判别法：

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$ 满足：

(1) 数列 $\{u_n\}$ 递减，即 $u_{n+1}\leqslant u_n$，$n>N$；

(2) 数列 $\{u_n\}$ 极限为 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。

例 7.2 讨论下列交错级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$。

解 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 是交错级数，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$。接下来，证明 $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ 是递减的。令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>3$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 是递减的。根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 收敛。又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散，所以所求级数条件收敛。

(2) 当 n 充分大时，有 $\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi\to 0$，于是作如下变换，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi+n\pi)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}。$$

因为 $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim\dfrac{1}{2}\pi a^2\cdot\dfrac{1}{n}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 具有相同的敛散性，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})\right|$ 发散。

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 是交错级数，显然 $\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 递减，极限为 0，根据莱布尼茨判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 收敛。故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 条件收敛。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的前 S_{2n} 项和为

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

每一项都是负的，所以 $\{S_{2n}\}$ 是单调递减的，且

$$S_{2n}>\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)>-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以有下界，因此 $\{S_{2n}\}$ 收敛。不妨令 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1+(-1)^{2n+1}}}=S,$$

所以 $\{S_n\}$ 收敛。又由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发散，所以原级数条件收敛。

(4) 由泰勒公式

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3+o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3$$
$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^{3n}}{3n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 发散。

证明数列 $\{u_n\}$ 递减，有两个方法

方法1 直接证明 $u_{n+1}\leqslant u_n$，$n>N$；

方法2 将 u_n 中的 n 改为 x 得到函数 $u(x)$，证明函数 $u(x)$ 是递减的，于是只需证明导函数 $u'(x)\leqslant 0$，$x>N$（N 是某个自然数）。

判别交错级数敛散性方法综述

(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数发散。

(2) 一般项加绝对值，变成正项级数，若收敛，则原级数绝对收敛。

(3) 若加绝对值，正项级数发散，利用莱布尼茨判别法，证明 $\{u_n\}$ 单调递减，极限是0，则原级数收敛，即是条件收敛。

(4) 若 $\{u_n\}$ 不是单调的，可用以下三个方法：

(i) 定义法：证明前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛，如例7.2(3)；

(ii) 拆项法：将一般项表示为几项的和，再考虑每一项组成的级数是否收敛；

(iii) 泰勒公式：将一般项用泰勒公式表示为带有佩亚诺余项的若干项的和，再讨论每一项为一般项的级数的敛散性，如例7.2(4)。

题型3 判别任意项级数的敛散性

例7.3 讨论下列任意项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$； (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$。

解 (1) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛，所以所求级数收敛。又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛，所以所求级数是条件收敛。

(2) 由于

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 中，$\left\{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right\}$ 递减，极限是0，根据莱布尼茨判别法知，此级数收

敛。而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散。故所求级数发散。

判别任意项级数的敛散性方法综述

(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数发散。

(2) 一般项加绝对值，变成正项级数，若该正项级数收敛，则原级数绝对收敛。

(3) 若加绝对值，正项级数发散，可用以下三个方法：

(i) 定义法：证明前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛；

(ii) 拆项法：将一般项表示为几项的和，考虑每一项组成的级数是否收敛，如例 7.3；

(iii) 泰勒公式：将一般项用泰勒公式表示为带有佩亚诺余项的若干项的和，再讨论每一项组成的级数的敛散性。

练习题 7-1

1. 用比较法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^{2n+1}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^3}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)(a>1)$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$；　(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$；

(11) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$；　(12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}}$；　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$。

2. 用比值判别法和根值判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{2^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n(x>0)$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{4^n}$；　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+1}$。

3. 讨论下列变号级数绝对收敛,条件收敛或发散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}(p>0)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$;　　(10) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$。

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛。

5. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ 也发散。

6. 设 $a_n>0$,证明:正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛。

7. 设 $a_n>0$, $a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的。

8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 具有一阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

7.2 幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

一、基本概念

定义 6 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在 (a,b) 内的函数列,称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

是定义在 (a,b) 内的**函数项级数**。

定义 7 设 $x_0\in(a,b)$,若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**,若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散,则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**发散点**;函数项级数的收敛点的集合称为函数项级数的**收敛域**。

定义 8 称函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots \quad (1)$$

为关于 $x-x_0$ 的**幂级数**，其中 $a_n(n=1,2,\cdots)$为**幂级数的系数**。

当 $x_0=0$ 时，幂级数(1)转化为最简单形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots。 \quad (2)$$

定义 9 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在(a,b)内收敛，在$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$内发散，则称$(a,b)$为**收敛区间**，$R=\dfrac{b-a}{2}$为**收敛半径**，将收敛区间端点的收敛点加到收敛区间上，就是幂级数的**收敛域**。

特别地，若幂级数(2)，当 $|x|<R$ 时收敛，当 $|x|>R$ 时发散，则正数 R 就是幂级数(2)的**收敛半径**；开区间$(-R,R)$为幂级数(2)的**收敛区间**；将幂级数(2)在 $x=\pm R$ 的收敛点加到收敛区间上，就是幂级数(2)的**收敛域**。

并规定：如果幂级数(2)仅在 $x=0$ 收敛，收敛半径 $R=0$；如果幂级数(2)对一切 x 收敛，收敛半径 $R=+\infty$。

幂级数(2)的收敛半径是 $R\ (R>0)$，则当 $|x|<R$，幂级数(2)绝对收敛，当 $|x|>R$ 时，幂级数(2)发散，当 $|x|=R$ 时，幂级数(2)可能收敛，也可能发散。

注 幂级数的收敛区间和收敛域是两个不同的概念，如果幂级数(2)的收敛半径是 R，那么它的收敛区间为$(-R,R)$，而收敛域有四种可能情形：

$$(-R,R);\quad (-R,R];\quad [-R,R);\quad [-R,R],$$

但是真正是哪种情形，需要检验当 $x=\pm R$ 时所对应的两个数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$的敛散性。

二、基本结论

定理 5(幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域)

方法 1 当幂级数系数都不是零时，用一般项系数求收敛半径，从而确定收敛区间和收敛域：

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数 a_n都不是 0，且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则：(1) 当 $0<\rho<+\infty$ 时，幂级数(2)的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$；

(2) 当 $\rho=0$ 时，幂级数(2)的收敛半径 $R=+\infty$，此时幂级数在整个数轴上收敛；

(3) 当 $\rho=+\infty$ 时，幂级数(2)的收敛半径 $R=0$，此时幂级数仅在 $x=0$ 处收敛。

方法 2 当幂级数部分项系数是零时，用一般项求收敛区间，从而确定收敛半径和收敛域。

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ 为幂级数($a_n(x)$ 表示幂级数的一般项)，且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\rho(x),\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|}=\rho(x)。$$

令 $\rho(x)<1$,此不等式的解设为 $a<x<b$,收敛区间为 (a,b),收敛半径 $R=\dfrac{b-a}{2}$。

方法 3　转化为形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 幂级数,求其收敛半径,确定收敛区间和收敛域,从而得到原级数的收敛域、收敛区间和收敛半径。

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 不是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的形式,可以通过简单变换,变成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数,即设 $t=f(x)$,使级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 化为形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 的级数,求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛域,不妨设为 $a<t\leqslant b$,于是不等式 $a<f(x)\leqslant b$ 的解就是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 的收敛域。

方法 4　幂级数仅仅在收敛区间的端点处可能条件收敛,在其他点绝对收敛或发散,则:

(1) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x_0 处条件收敛,则收敛半径是 $R=|x_0|$;

(2) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在点 x_0 处条件收敛,则收敛半径是 $R=|x_0-2|$;

(3) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在点 $2+x_0$ 处收敛,在 $2-x_0$ 处发散,则收敛半径是 $R=|x_0|$。

注　在级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^{2n}$ 中,没有 x 的奇次幂项,视为 x 的奇次幂项系数是零,所以这个幂级数就是部分项系数为零的,因此这个级数是不能用一般项系数求收敛半径的。换言之,如果级数一般项不是 a_nx^n,或 a_nx^{n-1},或 a_nx^{n+1} 等形式,一般是不能用一般项系数 a_n 求收敛半径的!

三、基本方法

题型 4　求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

例 7.4　求下列幂级数(系数都不为 0)的收敛半径、收敛区间和收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(x-1)^n$。

解　(1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}=2,$$

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{2}$,收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

下面讨论幂级数在收敛区间的端点是否收敛。

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,对应的数项级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}。$$

此级数是交错级数,$u_n=\frac{1}{n}$ 递减,极限是 0,于是此级数收敛;

当 $x=\frac{1}{2}$时,对应的数项级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}。$$

此级数是调和级数,当然发散。所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ 的收敛域是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$,当然它的收敛区间和收敛域都是$\mathbb{R}$。

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,$$

所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n^nx^n$ 的收敛半径为$R=0$。于是它的收敛域是$\{0\}$(此级数仅在 $x=0$ 处收敛,其他点处都发散)。

(4) 令 $t=x-1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}t^n$。由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$$

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}t^n$ 的收敛半径为 $R=1$。当 $t=\pm1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n^2}$ 都收敛,因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}t^n$ 的收敛域是$[-1,1]$。于是有 $-1\leqslant x-1\leqslant1$,即 $0\leqslant x\leqslant2$,所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-1)^n$ 的收敛域是$[0,2]$,收敛区间是$(0,2)$,收敛半径 $R=1$。

例 7.5 求下列幂级数(部分项系数为 0)的收敛半径和收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n-1}}{2^{2n}}$。

解 (1)【方法 1】设 $a_n(x)=\frac{n}{2^n}x^{2n}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{2n+2}}{\frac{n}{2^n}x^{2n}}\right|=\frac{1}{2}x^2 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}x^{2n}\right|}=\frac{1}{2}x^2。$$

令$\frac{1}{2}x^2<1$,解不等式得到$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,所以幂级数收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,收敛半径为$R=\sqrt{2}$。当$x=\pm\sqrt{2}$时,相应的数项级数是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$,显然发散,于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$收敛域是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

【方法2】设$t=x^2$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^n$,下面求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^n$的收敛域。由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\frac{1}{2},$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^n$的收敛半径$R=2$,收敛区间为$(-2,2)$。当$t=\pm 2$时,相应的数项级数是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$,显然发散,于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^n$收敛域是$(-2,2)$,即$-2<t<2$,因此有$-2<x^2<2$,不等式解为$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$。所以原幂级数收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,收敛半径为$\sqrt{2}$。

(2) 设$a_n(x)=\frac{(x-1)^{2n-1}}{2^{2n}}$,则有

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{2n+2}}}{\frac{(x-1)^{2n-1}}{2^{2n}}}\right|=\frac{1}{4}(x-1)^2。$$

令$\frac{1}{4}(x-1)^2<1$,解不等式得$-1<x<3$,所以收敛区间为$(-1,3)$,收敛半径为$R=2$。当$x-1=\pm 2$时,相应的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 2)^{2n-1}}{2^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm\frac{1}{2}$都发散,于是此级数的收敛域是$(-1,3)$。

例7.6 求下列幂级数(未知系数)的收敛半径和收敛域:

(1) 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=2$是条件收敛,在$x=-2$绝对收敛,求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛半径和收敛区间和收敛域;

(2) 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$在$x=0$处收敛,在$x=6$处发散,求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径和收敛区间和收敛域。

解 (1) 由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=2$条件收敛,所以该级数的收敛半径$R=2$。又由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=-2$绝对收敛,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛域为$[-2,2]$。因此$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域为$[-1,3]$,收敛区间为$(-1,3)$,收敛半径为$R=2$。

(2) 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛中心是$x=3$,根据在$x=0$处收敛,在$x=6$处发散,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛半径$R=3$,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=3$,收敛区间是$(-3,3)$,收

敛域为[-3,3)。

求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域方法综述

求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域的关键是求收敛半径。收敛半径确定了,收敛区间就确定,然后再分别判断幂级数在收敛区间的两端点是否收敛,从而得到收敛域。

(1) 形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的幂级数,且系数都不是 0 时,可用一般项的系数求收敛半径,从而得到收敛区间,进而确定收敛域,如例 7.4。

(2) 若幂级数不是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的形式,可用一般项求收敛求出收敛区间,再求收敛域和收敛半径,也可将级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$形式的幂级数,求出收敛域,从而确定原级数的收敛域、收敛区间和收敛半径。如例 7.5。

当然,不论何种情况,用一般项求收敛区间,从而确定收敛半径,再检验级数在收敛区间端点是否收敛,得到收敛域,这个方法总是可行的!

练习题 7-2

1. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!!}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{2^n}+3^n\right)x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$。

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 处发散,在 $x=4$ 处收敛,求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}a_n x^n$ 的收敛半径和收敛区间。

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径、收敛区间和收敛域。

7.3 求和函数与数项级数的和

一、基本概念

定义 10 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 前 n 项和函数列 $\{S_n(x)\}$ 收敛于 $S(x)$,则称 $S(x)$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数。

定义 11 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ 和初等函数 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 展成的幂级数统称为已知级数。

二、基本结论

定理 6 常用的已知级数的和函数公式：

(1) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$，$(-1,1)$；

(2) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$(-1,1)$；

(3) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(4) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(5) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(6) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，$(-1,1]$。

定理 7 幂级数与幂级数的和函数的分析性质：

(1) 幂级数的和函数在收敛域上连续。

(2) 幂级数在收敛区间内逐项积分和逐项可导，即

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1},\quad x\in(-R,R);$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(a_n x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R)。$$

(3) 幂级数的逐项积分和逐项可导得到的幂级数收敛半径不变，收敛区间不变，但收敛域可能改变。

例如 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 收敛半径是 $R=1$，收敛区间是 $(-1,1)$，收敛域是 $[-1,1)$；

逐项积分 $\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{n}t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，此级数的收敛半径是 $R=1$，收敛区间是 $(-1,1)$，收敛域是 $[-1,1]$；

逐项求导 $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$，此级数的收敛半径是 $R=1$，收敛区间是 $(-1,1)$，收敛域是 $(-1,1)$。

(4) 求和函数的常用两个变换：

(i) 先积分，再求导，幂级数的和函数不变：

若 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，则 $S(x)=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(a_n x^n)dx\right]$。

(ii) 先求导,再积分,幂级数的和函数相差 $S(0)$:

若 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则 $S(x)=\int_0^x\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_nx^n)\right]\mathrm{d}x+S(0)$。

三、基本方法

题型 5 求幂级数的和函数

求和函数有三种方法:定义法,转化法和方程法。

方法 1 定义法 定义法就是利用函数项级数和函数的定义,求其和函数。

方法 2 转化法 转换法就是所求级数与已知级数相互转换。具体来说

(1) 将所求级数变化为已知级数;

(2) 用已知级数变化为所求级数。

这里的**变化**包括:**加**、**减**(增减项),**乘**、**除**(常数或变量 x)、**积分**、**求导**的六类变化。

方法 3 方程法 方程法就是将和函数建立在微分方程中,解方程,求出和函数。

例 7.7 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域及其和函数。

解 【定义法】令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 的前 n 项部分和为 $S_n(x)$,则

$$S_n(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-2x}+3\mathrm{e}^{-3x}+\cdots+n\mathrm{e}^{-nx};$$
$$\mathrm{e}^{-x}S_n(x)=\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{-3x}+3\mathrm{e}^{-4x}+\cdots+n\mathrm{e}^{-(n+1)x}。$$

两式相减得到

$$(1-\mathrm{e}^{-x})S_n(x)=(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-3x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx})-n\mathrm{e}^{-(n+1)x}=\frac{\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-nx})}{1-\mathrm{e}^{-x}}-n\mathrm{e}^{-(n+1)x}。$$

显然当 $x>0$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-nx})}{1-\mathrm{e}^{-x}}-n\mathrm{e}^{-(n+1)x}\right]=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}。$$

当 $x\leqslant0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 不存在。于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为$(0,+\infty)$,它的和函数是

$$S(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2},\quad x>0。$$

【转化法】由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n$ 是等比级数,仅当$|\mathrm{e}^{-x}|<1$,即 $x>0$ 级数收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}},\quad x>0。$$

两边求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}-n\mathrm{e}^{-nx}=\frac{-\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})+\mathrm{e}^{-2x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{-\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-2x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2},$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2},\quad x>0。$$

例 7.8 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数。

解 【转化法】用已知级数变化成所求级数：幂级数的收敛域为 $(-1,1)$。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-1,1),$$

两边求导

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1),$$

两边同乘 x 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1)。$$

例 7.9 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^{n-1}$的和函数。

解 级数的收敛域是$[-2,2)$。

【转化法】把所求级数变化为 $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的形式。

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^{n-1}$，当 $x \in [-2,2)$ 且 $x \neq 0$ 时，有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^{n-1} = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)。$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$，所以级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & [-2,0)\cup(0,2), \\ \frac{1}{2}, & x = 0。\end{cases}$$

【转化法】(把所求级数变化为等比级数)

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^{n-1}$，当 $x\in[-2,2)$，$x\neq 0$ 且 $x\neq -2$ 时，有

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n,$$

两边求导

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}。$$

$\left(此处要求公比 \frac{x}{2} 的绝对值小于1，所以 x\neq -2\right)$两边积分

$$xS(x) = \int_0^x [tS(t)]'\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2-t}\mathrm{d}t = -\ln(2-t)\Big|_0^x = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)。$$

两边同除 x(此处要求 $x\neq 0$)，有

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)。$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$；当 $x=-2$ 时，$S(x)$ 在 $x=-2$ 有定义。故幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \frac{1}{2}, & x=0。\end{cases}$$

例 7.10 设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}, n\geqslant 2$，求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径，收敛区间以及和函数。

解 根据 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$，则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2+3\frac{a_{n-1}}{a_n}$。令 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x$，有 $x=2+\frac{3}{x}$，解得 $x=3$。于是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径 $R=\frac{1}{3}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

根据 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}, a_1=a_2=1$，则有 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=2\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^{n+1}+3\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n+1}$，从而有

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=2x\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+3x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}。$$

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=f(x)$，则有 $f(x)-a_1x-a_2x^2=2x[f(x)-a_1x]+3x^2f(x)$，根据 $a_1=1, a_2=1$，解得

$$f(x)=\frac{x(1-x)}{(1-3x)(1+x)},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)。$$

例 7.11 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数。

解 幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$。令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则有 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，于是有

$$S(x)+S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x。$$

此方程是一阶线性方程，其通解为

$$S(x)=\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

由于 $S(0)=1$，于是得到 $C=\frac{1}{2}$，所以幂级数的和函数为 $S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{ch}x$。

求幂级数的和函数方法综述

(1) 求幂级数的和函数有三个方法，分别是定义法，转化法与方程法。而转化法和方程法是两个常用的方法。

(2) 应用转化法求幂级数的和函数时，首先求收敛域，然后在收敛域上，求和函数。在这个过程中，若对变量 x 有限制(如例 7.9 的 $x\neq 0$)，就在收敛域后添加对 x 的这个限制，从而得到在收敛域上或去掉个别限制点的收敛域上和函数，最后再求出限制点的和函数值。

(3) 由于和函数在收敛域内是连续的，所以对和函数的收敛域内有定义的限制点的函

数值，不必另外计算，就等于这点函数值，只需求出没有定义的点的函数值。

(4) 求和函数在限定点的函数值有两个办法：

(i) 将该点代回到原函数项级数，计算相应的数项级数的和(如例7.9的 $x=0$)；

(ii) 利用和函数在收敛域的连续性，求和函数在该点的极限，即 $S(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}S(x)$。

(5) 当没办法将所求函数转化为已知级数时，需要考虑能否将和函数建立在满足某个等式(见例7.10)或微分方程(见例7.11)，然后求函数或微分方程的解，从而得到幂级数的和函数。

对于一些用方程法求和函数问题，往往是分成两问：一是验证和函数满足某微分方程，二是求幂级数的和函数。这类问题在某种意义上说，降低了求和函数的难度，提示我们用方程法求和函数。

题型6 求数项级数的和

求数项级数的和有两个方法：

(1) **定义法**：把数项级数的前 n 项和 S_n 表示为关于 n 的代数式，求得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则 S 就是数项级数的和。

例如：求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和。利用定义法，即

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$。

考虑到这个方法比较简单，况且能用定义法求和的数项级数少之甚少，所以这里对此方法不再作过多的赘述。

(2) **构造幂级数法**：构造幂级数法就是构造一个幂级数，求其和函数，取 x 为某个适当数值，从而得到所求数项级数的和。

例7.12 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和。

解 构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，其收敛区间是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2-x^2}\right)=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\end{aligned}$$

取 $x=1\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，于是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=3$。

例7.13 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}$ 的和。

解 构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}x^{2n-1}$，其收敛区间是 $(-2,2)$。设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n} x^{2n-1},$$

则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n} x^{2n-2} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{4 + x^2}。$$

由于 $S(0)=0$，两边积分，于是有

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\mathrm{d}x + S(0) = \int_0^x \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x。$$

取 $x=1\in(-2,2)$，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n} = S(1) = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$。

例 7.14 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!}$ 的和。

解 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!}。$$

首先求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{n}{2^n}x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{2}{(2-x)^2}, \quad x\in(-2,2)。$$

取 $x=1\in(-2,2)$，于是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$。

现在求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!}$ 的和。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x\in\mathbb{R},$$

取 $x=1\in\mathbb{R}$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}。$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!} = 2 + \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$。

求数项级数的和方法综述

求数项级数的和有两个方法：定义法与构造幂级数法。

(1) 定义法就是求出级数部分和数列的极限，此极限就是级数的和。事实上，能用这个方法求得级数的和很少。因为可用这个方法的级数前提，一定要将部分和表示为关于 n 的代数式，否则一般没有办法求其极限。

(2) 用构造幂级数法求数项级数的和，首先需要构造一个幂级数。在保证构造幂级数与所求数项级数基本一致(自变量 x 取某个常数后，与所求级数最多相差一个常数)前提下，主要考虑容易求出所构造幂级数的和函数。因此，为求一个数项级数的和所构造的幂级数

并非是唯一的。

(3) 为求数项级数的和，在求构造的幂级数的和函数时，一般不必要求收敛域，只需求收敛区间就可以了。这样就不用判断收敛区间端点的收敛性。因为我们所关注的是和函数在一点，且仅仅一点的函数值。如例7.13，只求收敛区间$(-2,2)$，至于在端点是否收敛我们不去考虑，关心的是所构造的幂级数在 $x=1$（确保在收敛区间$(-2,2)$内即可）处，级数的和。

练习题 7-3

1. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n$。

2. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n^2-1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)!}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{4^n}$。

3. 设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，证明：当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛，并求其和函数。

4. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ 的和。

7.4 函数展成幂级数

一、基本概念

定义 12 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有任意阶导数，则称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**，或称函数 $f(x)$ 的关于 $(x-x_0)$ 的幂级数，$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数的系数**。

定义 13 若函数 $f(x)$在点 0 处具有任意阶导数，则称幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**，或称 $f(x)$的关于 x 的幂级数，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数的系数**。

二、基本结论

定理 8 常用的初等函数展成的关于 x 的幂级数公式：

(1) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$(-1,1)$；

(2) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$(-1,1)$；

(3) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(4) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(5) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$(-\infty,+\infty)$；

(6) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，$(-1,1]$。

三、基本方法

1. **定义法** 求函数 $f(x)$的 n 阶导数，从而得到泰勒级数系数$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$或麦克劳林级数的系数$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，进而得到函数展成的幂级数。

2. **公式法** 通过变形，使函数表示成上述 6 种初等函数的和或差形式，然后利用它们展成的幂级数，将函数展成的幂级数。

题型 7 函数展成麦克劳林级数

例 7.15 将下列函数展开成关于 x 的幂级数：

(1) $\frac{1}{2-x}$； (2) $\frac{1}{x^2+3x+2}$； (3) $\cos^2 x$；

(4) $\frac{1}{(x-1)^2}$； (5) $(1+x)\ln(1+x)$； (6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$。

解 (1) 将函数变形，有

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}。$$

利用定理 8 的公式(1)，得到

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n。$$

由于$\frac{x}{2}\in(-1,1)$，所以级数的收敛域是$(-2,2)$。

(2) 将函数变形，有

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}。$$

由于

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1;$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n,\quad -2<x<2,$$

于是

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\quad -1<x<1。$$

注 两幂级数收敛半径不等时，和或差的收敛域，是两幂级数收敛域的交集。当两幂级数的收敛半径相等都是R时，和或差的收敛半径大于或等于R。

(3) 将函数变形，得到

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x。$$

根据定理8的公式(5)，得到

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

(4) 通过积分，将$\frac{1}{(x-1)^2}$变形得到

$$\int_0^x\frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t=-1+\frac{1}{1-x}。$$

于是，根据定理8的公式(1)有

$$\int_0^x\frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t=-1+\frac{1}{1-x}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}x^n。$$

对上面等式两边对x求导，有

$$\frac{1}{(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\quad x\in(-1,1)。$$

(5) 由于

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad (-1,1],$$

所以

$$(1+x)\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n},$$

于是

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1},\quad(-1,1]。$$

(6) 由于 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,于是$\frac{1-\cos x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)}{(2n)!}x^{2n-2},\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

注 将函数展成麦克劳林级数,往往需要将级数合并。合并原则是:一般项 x 的次数相同,$\sum$ 和的下标相同,于是在合并中常常用降低一般项次数或提升一般项次数,则有

(1) 降低一般项次数:$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}$;

(2) 提升一般项次数:$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$。

例 7.16 将函数 $f(x)=\arctan x^2$ 展成关于 x 的幂级数,并求 $f^{(2016)}(0)$,$f^{(2018)}(0)$。

解 由于

$$(\arctan x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1},\quad x\in(-1,1)$$

于是逐项积分,有

$$\arctan x^2=\int_0^x(\arctan x^2)'\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\int_0^x x^{4n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{4n+2},\quad x\in[-1,1],$$

所以

$$f(x)=\arctan x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{4n+2},\quad x\in[-1,1]。\tag{1}$$

下面求 $f^{(2016)}(0)$和 $f^{(2018)}(0)$。由于 $f(x)$展成的麦克劳林级数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\tag{2}$$

所以级数(1)和级数(2)是同一个级数,于是级数中对应项的系数相等。在级数(1)中,没有 x^{2016}项,所以幂级数 x^{2016} 项的系数是 0,即 $f^{(2016)}(0)=0$。在级数(2)中,x^{2018} 的系数是 $\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!}$,在级数(1)中,$x^{2018}$ 的系数是$\frac{(-1)^{504}}{1009}$,从而有$\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!}=\frac{(-1)^{504}}{1009}$。于是有

$$f^{(2018)}(0)=\frac{2018!}{1009}=2\cdot 2017!。$$

注 利用函数展成的幂级数计算函数在一点的高阶导数是求函数在一点的高阶导数的有效方法。具体方法就是将函数展成关于 x 的麦克劳林级数,x^n项的系数等于$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$,从而

求出 $f^{(n)}(0)$；或者展成关于$(x-x_0)$的泰勒级数，$(x-x_0)^n$项的系数等于$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，从而求出 $f^{(n)}(x_0)$。

一般情况下，求函数在一点的三阶导数或四阶导数，是可以用逐次求导法求出导函数，再求这点的导函数的值，但是由于一些函数的求导的复杂性，只能用泰勒级数法。

例如(2017，二(9)(4分))已知 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，求 $f'''(0)$。用泰勒级数法，结果是显然的，但是若求三阶导数，特麻烦。又如(2016，二(12)(4分))$f(x)=\arctan x-\frac{x}{1-ax}$ 且 $f'''(0)=1$，求 a。同样要用泰勒级数法。

函数展成麦克劳林级数方法综述

函数展成麦克劳林级数有两个方法：定义法和公式法。

1. 定义法就是求出任意阶导函数 $f^{(n)}(x)$，从而确定麦克劳林级数系数$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，于是得到函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$。

2. 公式法就是通过六类变化：加、减(增减项)、乘、除(常数或变量 x)、求导和求积分，将函数表示为定理8中六类函数的和与差形式，再利用公式展成幂级数。

需要指出的是：函数展成的幂级数一定要写出收敛域。在确定幂级数的收敛域时，可以采用两个途径：

(1) 求函数展成的幂级数的收敛域；

(2) 根据公式中幂级数的收敛域，确定函数展成的幂级数的收敛域。

需要说明的是：一般地，只有少数比较简单的函数，其幂级数的展开式可以利用定义法求得。在更多的情况下，将一个函数展成麦克劳林级数，都是使用六个公式，如果不能直接使用，可以通过变化，把函数变成公式的基本形式。因此熟悉、牢记和灵活运用六个公式显得特别重要。

题型8　函数展成泰勒级数

将函数 $f(x)$展成泰勒级数，即关于$(x-x_0)$的幂级数，其思想和方法与函数展成麦克劳林级数是基本相同的，我们只需将函数 $f(x)$ 变成关于$(x-x_0)$的函数，将$(x-x_0)$“捆绑”在一起，然后按照麦克劳林级数进行展开。

例 7.17　将下列函数展开成关于$(x-1)$的泰勒级数：

(1) $\frac{1}{x+1}$；　　(2) $\ln(x^2+3x+2)$；

(3) $\sin x$；　　(4) $\frac{1}{x^2}$。

解　(1) 变形，得到

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n,\quad x\in(-1,3)。$$

(2) 变形,得到

$$\begin{aligned}\ln(x^2+3x+2) &= \ln(x+2)+\ln(x+1) = \ln[3+(x-1)]+\ln[2+(x-1)]\\ &= \ln3+\ln\left(1+\frac{x-1}{3}\right)+\ln2+\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right)\\ &= \ln6+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+1}\\ &= \ln6+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^{n+1},\quad x\in(-1,3]。\end{aligned}$$

(3) $\sin x=\sin[(x-1)+1]=\sin(x-1)\cos1+\cos(x-1)\sin1$

$$\begin{aligned}&= \cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}+\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-1)^{2n}\\ &= \cos1+\sin1(x-1)-\frac{\cos1}{2!}(x-1)^2-\frac{\sin1}{3!}(x-1)^3+\cdots+\\ &\quad \frac{(-1)^n\sin1}{(2n)!}(x-1)^{2n}+\frac{(-1)^n\cos1}{(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}。\end{aligned}$$

(4) 由于$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,0<x<2$,两边求导

$$-\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^{n-1},$$

于是

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(x-1)^{n-1},\quad 0<x<2。$$

函数展成泰勒级数方法综述

函数 $f(x)$展成泰勒级数,即关于$(x-x_0)$的幂级数有两个方法:定义法和公式法。

1. 定义法就是求出任意阶导函数 $f^{(n)}(x)$,从而确定泰勒级数系数$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$,于是得到函数 $f(x)$ 的泰勒级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$。

2. 公式法就是将函数 $f(x)$的变量 x 捆绑为$(x-x_0)$,将$(x-x_0)$ 视为一个变量,按照展成麦克劳林级数方法,展成关于$(x-x_0)$ 的幂级数。当然捆绑分为直径捆绑,如例 7.16 的(1)和(3),当然也可变换后再捆绑,如例 7.16 的(2),这需要根据实际情况而定。另外,对一些不适合直接利用公式的函数,也可以将其原函数或导函数展成泰勒级数,然后再求导或积分,如例 7.16 的(4)。

练习题 7-4

1. 将下列函数展成麦克劳林级数:

(1) e^{2x};　　(2) $\dfrac{x}{x+2}$;　　(3) $\sin^2 x$;

(4) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　(5) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$;　　(6) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$;

(7) $\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t$；　　(8) $\frac{1}{x^2-x-2}$。

2. 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数：

(1) $\ln x$；　　(2) $\frac{1}{x^2+x}$；　　(3) $x\ln(x+1)$；

(4) $\mathrm{e}^{\frac{x+1}{2}}$；　　(5) $\frac{1}{(1+x)^2}$；　　(6) $\arctan(x-1)$。

*7.5 傅里叶级数

一、基本概念

定义 14　设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi]$上可积，则 $f(x)$ 的傅里叶级数(三角级数)为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$f(x)$展成的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),\quad x \in D, \tag{1}$$

傅里叶系数和收敛域分别为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N}, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \quad D = \left\{x \mid f(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right\}。$$

定义 15　设 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的周期函数，在$[-l,l]$上可积，则 $f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$f(x)$展成的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),\quad x \in D, \tag{2}$$

傅里叶系数和收敛域分别为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N}, \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad D = \left\{x \,\middle|\, f(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right\}。$$

定义 16　正弦级数与余弦级数

(1) 若 $f(x)$是奇函数，则傅里叶系数 $a_n=0, n\in\mathbb{N}$，于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,\quad x \in D,\quad 其中\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n \in \mathbb{N}_+。$$

把仅含有正弦函数的傅里叶级数称为**正弦级数**。

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数,则傅里叶系数 $b_n=0,n\in\mathbb{N}_+$,于是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad x\in D,\quad 其中\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N}。$$

把仅含有余弦函数的傅里叶级数称为**余弦级数**。

二、基本结论

定理 9 (傅里叶级数收敛定理)

若 $f(x)$是$\mathbb{R}$上以 2π 为周期的在$[-\pi,\pi]$逐段光滑的函数,则:

(1) 函数 $f(x)$的傅里叶级数在$\mathbb{R}$上收敛,其和函数是$\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$,即

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in\mathbb{R}。$$

(2) 函数 $f(x)$的展成的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in D=\left\{x\,\middle|\,f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right\}。$$

关于傅里叶级数的几点说明

1. 函数的傅里叶级数与函数展成的傅里叶级数是不同的概念。函数的傅里叶级数就是三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in\mathbb{R},$$

只需求出傅里叶系数,写出这样三角级数即可。然而,函数展成的傅里叶级数,一定是函数等于傅里叶级数,这不仅要求出傅里叶系数,而且必须确定傅里叶级数收敛于(等于)该函数的范围 D。

2. 在确定 D 时,需要考虑函数 $f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上,还是定义在某个区间上。如果叙述为:函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,它在$(-\pi,\pi]$的表达式为 $f(x)=|x|$,显然此函数是定义在$\mathbb{R}$上;如果叙述为:将函数 $f(x)=|x|$在$(-\pi,\pi]$上展开成傅里叶级数,这个函数是定义在$(-\pi,\pi]$上的。

3. 若函数定义在$\mathbb{R}$上,我们要考虑在$\mathbb{R}$上,确定 D,若函数定义在某个区间上,我们只需在这个区间上,确定 D。具体说:

(1) $f(x)$ 定义在$\mathbb{R}$上,D 表示:$x\in\mathbb{R}$,且 $x\neq$ 函数在$\mathbb{R}$上的间断点(不包括左右极限平均值等于函数值的间断点);

(2) $f(x)$定义在$(-\pi,\pi]$上,D 表示:$x\in(-\pi,\pi]$,且 $x\neq$ 函数在$(-\pi,\pi]$上的间断点(不包括左右极限平均值等于函数值的间断点)。

4. 事实上,在没有求出函数的傅里叶级数前,就可以断定函数的傅里叶级数在任何一点收敛的数值(数项级数的和)。

5. 根据傅里叶级数收敛定理,若 x 是函数的连续点,傅里叶级数收敛于 $f(x)$,若 x 是函数的间断点,傅里叶级数收敛于点 x 的左右极限的平均值,即$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$。

三、基本方法

题型 9 傅里叶级数的收敛域与傅里叶级数在一点的和

例 7.18 求下列傅里叶级数收敛 $f(x)$的收敛域和一点的和：

(1) $f(x)$是以 2π 为周期的函数，在$[-\pi,\pi)$上表达式为 $f(x)=x$，求它的傅里叶级数收敛 $f(x)$ 的区域。

(2) $f(x)$是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\pi],\\ 2\pi-x, & x\in(\pi,2\pi],\end{cases}$ 求 $f(x)$展成的傅里叶级数的定义域。

(3) $f(x)$是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi,0],\\ x^2, & x\in(0,\pi],\end{cases}$ 求 $f(x)$的傅里叶级数在点 -7π 和 8π 两个级数的和。

(4) $f(x)$是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\pi],\\ \pi, & x\in(\pi,2\pi],\end{cases}$ 则 $f(x)$展成的傅里叶级数在点 -7π 和 8π 处级数的和。

解 (1) $f(x)$的图像如图 7-1(a)所示，它在 $x=(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}$ 不连续，且左右极限的平均值不等于函数值，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在这些点不收敛于 $f(x)$，其他点是连续点，因此 $f(x)$的傅里叶级数收敛于 $f(x)$的区域为 $D=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\}$。

(2) $f(x)$的图像如图 7-1(b)所示，它在$\mathbb{R}$上连续，所以 $f(x)$展成的傅里叶级数的定义域是$\mathbb{R}$。

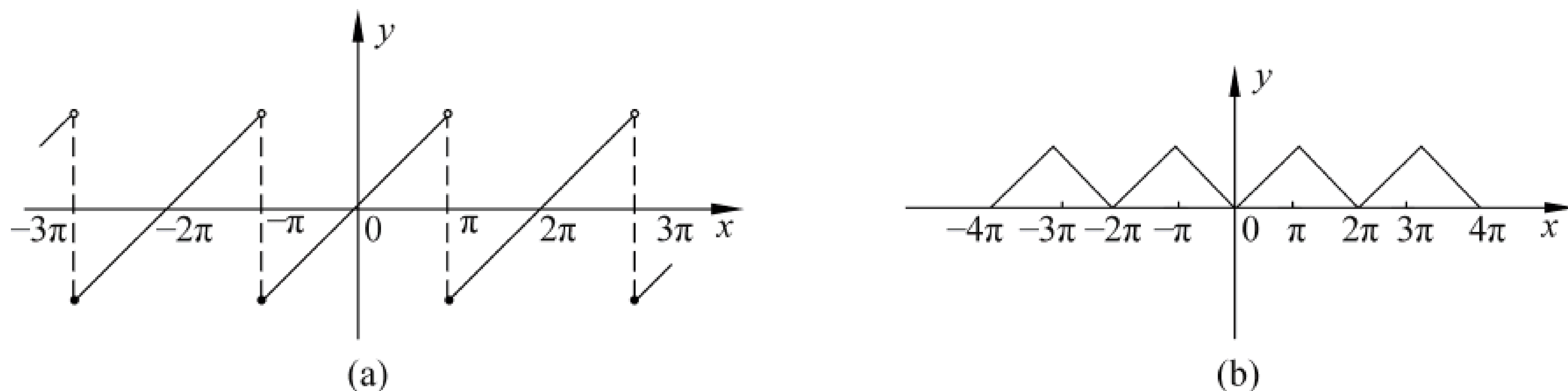


图 7-1

(3) $f(x)$的图像如图 7-2(a)所示，-7π 是函数 $f(x)$间断点，所以在-7π 处，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-7\pi^+)+f(-7\pi^-)]=\frac{1}{2}[f(\pi^+)+f(\pi^-)]=\frac{1}{2}\pi^2。$$

8π 是函数 $f(x)$连续点，所以在 8π 处，傅里叶级数收敛于这点的函数值 $f(8\pi)=f(0)=0$。

(4) $f(x)$的图像如图 7-2(b)所示，-7π 是函数 $f(x)$ 连续点，8π 是间断点，所以在-7π 处，傅里叶级数收敛于 $f(-7\pi)=f(\pi)=\pi$。在点 8π 处，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(8\pi^-)+f(8\pi^+)]=\frac{1}{2}[f(0^-)+f(0^+)]=\frac{1}{2}\pi。$$

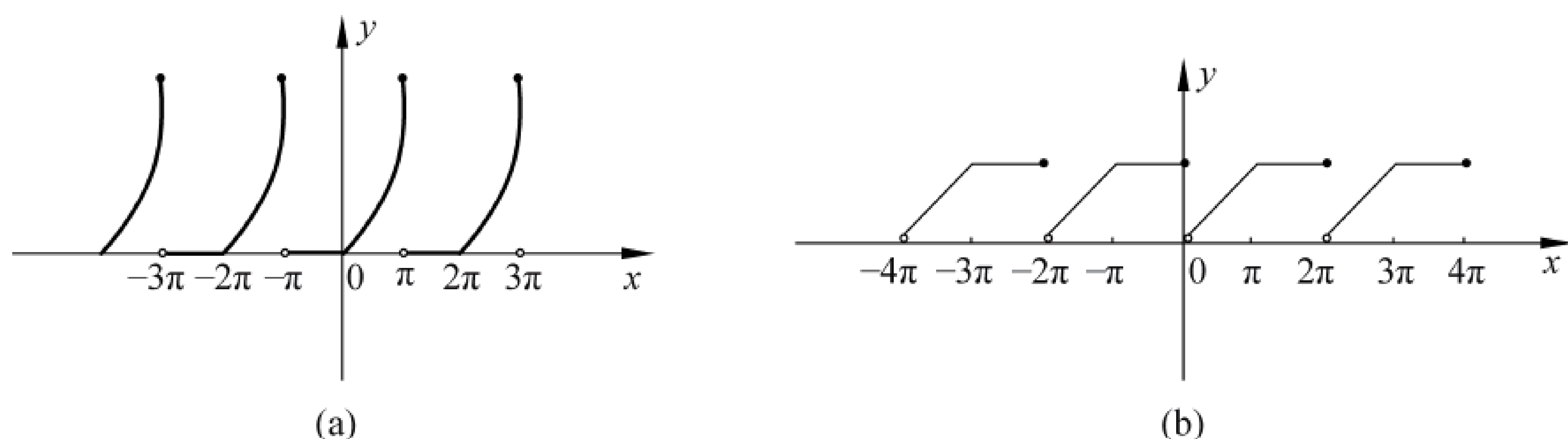


图 7-2

题型 10 函数展成傅里叶级数

例 7.19 设函数 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式是 $f(x)=x$，求 $f(x)$的傅里叶级数。

解 由于 $f(x)$在$[-\pi,\pi)$上是奇函数，所以 $f(x)$的傅里叶系数为

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots;$$

所以函数 $f(x)$的傅里叶级数是

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in\mathbb{R}\text{。}$$

注 求函数的傅里叶级数，只需求出傅里叶级数系数，写成上述$\sum$形式即可，不必写成连加形式，收敛域是$\mathbb{R}$。

若例 7.19 改为：将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。同样需求出傅里叶级数的系数，表示为 $f(x)$等于傅里叶级数，并确定傅里叶级数收敛 $f(x)$的区域，即

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in\mathbb{R}\quad 且\quad x\neq(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\text{。}$$

题型 11 函数展成正弦级数和余弦级数

例 7.20 将函数 $f(x)=x+1$ 在$[0,\pi]$上分别展开成正弦级数和余弦级数，并作出级数的和函数图像。

解 对 $f(x)$进行奇延拓，使其成为在$(-\pi,\pi]$上的奇函数，如图 7-3(a)所示，于是

$$a_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}[1-(\pi+1)\cos n\pi]\text{。}$$

根据收敛定理，函数 $f(x)=x+1$ 在$[0,\pi]$上展开成的正弦级数为

$$x+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(\pi+1)\cos n\pi]\sin nx,\quad x\in(0,\pi)\text{。}$$

正弦级数的和函数的图像如图 7-3(b)所示。

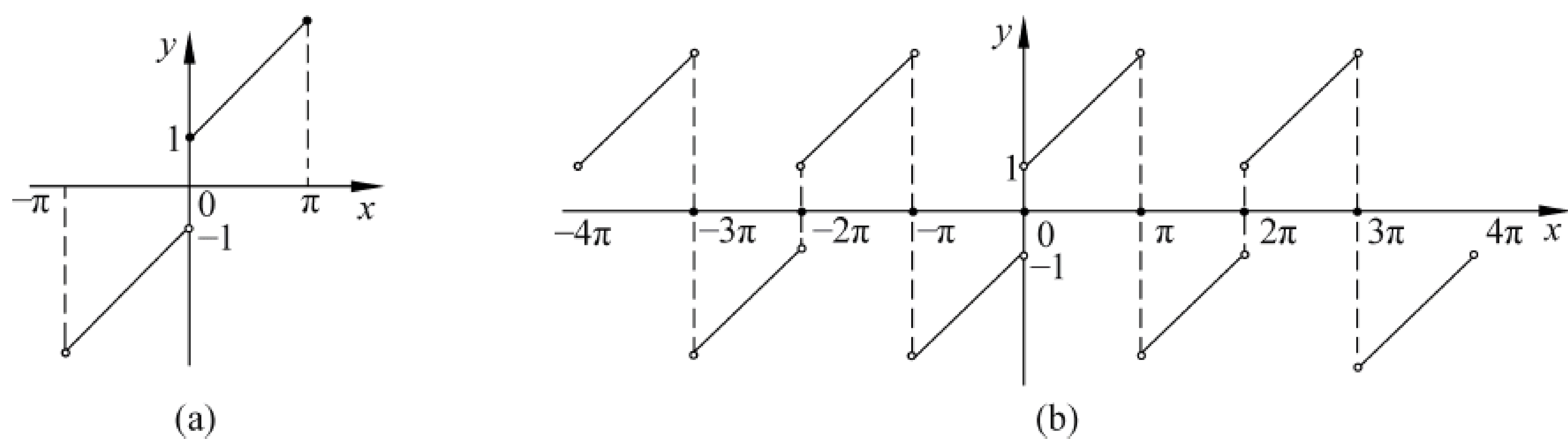


图 7-3

对 $f(x)$ 进行偶延拓，使其成为在 $(-\pi,\pi]$ 的偶函数，如图 7-4(a)所示，于是

$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots;$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\pi}=\pi+2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(x+1)\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]。$$

根据收敛定理，函数 $f(x)=x+1$ 在 $[0,\pi]$ 上展成的余弦级数为

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos nx,\quad x\in[0,\pi]。$$

余弦级数的和函数的图像如图 7-4(b)所示。

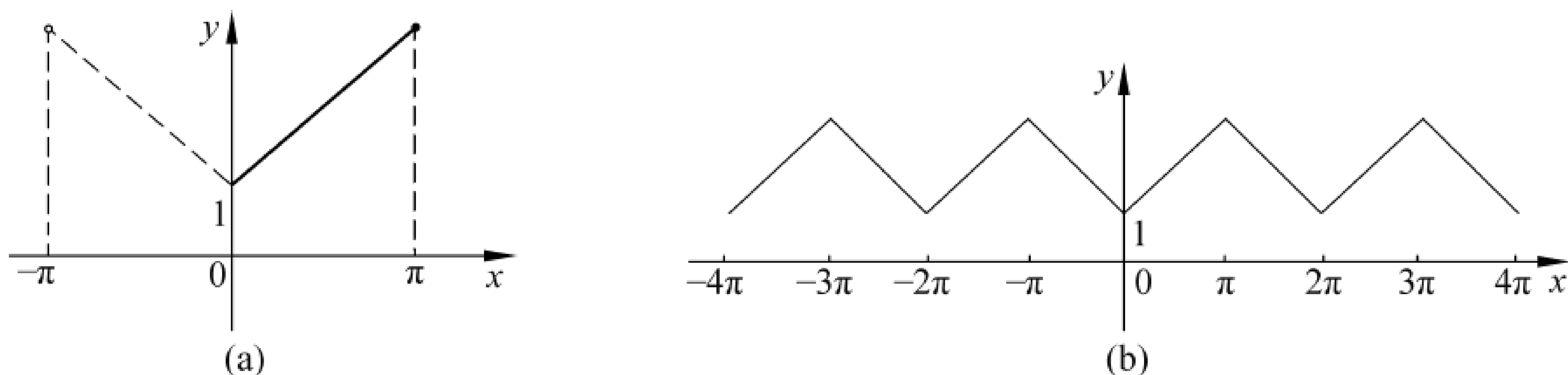


图 7-4

注 对函数在一个周期上作奇延拓或偶延拓，可能个别点未必满足奇、偶性质。如例 7.20 对函数 $f(x)$ 进行奇延拓后，$f(0)=1$ 并不是 $f(0)=0$。但这并不影响它展成的傅里叶级数是正弦级数或余弦级数，也不影响傅里叶级数的系数。

对函数在一个周期上作奇延拓或偶延拓，不必写出函数的表达式，这不影响傅里叶级数系数的计算，但需要画出图像，因为它关系到收敛域的确定。在更多的情况下，确定傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 区域，要借助图形的直观性。

题型 12 函数展成一般周期的傅里叶级数

例 7.21 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解 函数 $f(x)$ 的傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}x=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=0,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]。$$

根据收敛定理,$f(x)$展成的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in\mathbb{R}\quad 且\quad x\neq 0,\pm 2,\pm 4,\cdots。$$

例 7.22 把 $f(x)=x$ 在$[0,2]$内分别展开成正弦级数和余弦级数。

解 为了把 $f(x)$展开成正弦级数,于是对 $f(x)$ 作奇延拓,则

$$a_n=0,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi},\quad n=1,2,\cdots。$$

从而有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2)。$$

为了把 $f(x)$展开成余弦级数,对 $f(x)$作偶延拓,则

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots;\quad a_0=\int_0^2 x\mathrm{d}x=2;$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots。$$

从而有

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2]。$$

函数展成傅里叶级数方法综述

函数展成傅里叶级数需要解决两个问题:

(1) 求傅里叶级数的系数;

(2) 确定傅里叶级数收敛于函数的区域。

将一个函数在$\mathbb{R}$展开成傅里叶级数和在一个周期上展开成傅里叶级数,它们的傅里叶系数是相同的(具有相同的三角级数),但是用傅里叶级数表示函数时,变量 x 取值范围是不同的。

偶函数的傅里叶级数是余弦级数,奇函数的傅里叶级数是正弦级数。对于给定的定义在$[-\pi,0]$和$[0,\pi]$的函数,可以通过延拓的方法,将其延拓到定义在$[-\pi,\pi)$或$(-\pi,\pi]$上的偶函数或奇函数。当然,不论是偶延拓还是奇延拓,不必写出函数在一个周期的表达式,这不影响计算傅里叶级数的系数,只需画出图形即可。因为确定函数展成的傅里叶级数的区域要利用图像的直观性。

练习题 7-5

1. 将函数 $f(x)=\text{sgn}x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展成傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

2. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ x+2\pi, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)。$$

(1) 求系数 a_0，并证明 $a_n=0, n\geqslant 1$；

(2) 求傅里叶级数的和函数 $S(x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 及 $S(2\pi)$ 的值。

3. 将函数 $f(x)=x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展成正弦级数和余弦级数。

4. 设函数 $f(x)=\pi-x, x\in[0,\pi]$。

(1) 把函数 $f(x)$ 展成正弦级数；

(2) 写出傅里叶级数的和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式。

7.6 无穷级数考研真题

一、无穷级数考研数一真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于无穷级数在考研数一真题共出了23道题，题型分布在：

1. 判断、证明级数的敛散性：共计6个题，分布在2004年，2006年，2009年，2014年，2016年和2019年。

2. 求幂级数的收敛区间、收敛域：共计3个题，分布在2008年，2011年和2015年。

3. 求和函数与数项级数的和：共计9个题，分布在2005年，2007年，2009年，2010年，2012年，2013年，2018年和2019年(2)题。

4. 将函数展成幂级数，并求相应数项级数的和：共计2个题，分布在2003年和2006年。

5. 将函数展成傅里叶级数、求傅里叶级数的系数、收敛值：共计3个题，分布在2003年，2008年和2013年。

1 无穷级数考研数一真题题型分析

1. 判断、证明级数的敛散性：2004年考了级数和数列敛散性及其相关性质；2006年，2009年和2019年考了判断抽象级数的敛散性；2014年和2016年考了证明正项级数收敛。

2. 求幂级数的收敛区间，收敛域：2008年和2011年考了求幂级数(未知系数)的收敛域；2015年考了求幂级数的收敛半径和收敛区间，从而判断两个点收敛或发散。

3. 求和函数与数项级数的和：2013年考了用方程法求和函数；2005年，2007年，2010年，2012年和2019年考了用转换法求和函数；2009年和2018年考了用定义法和构造幂级数法求数项级数的和；2019年考了用等比级数求数项级数的和。

4. 将函数展成幂级数、并求相应数项级数的和：2003 年考了将函数展成幂级数，并求相应数项级数的和；2006 年考了将函数展成幂级数。

5. 将函数展成傅里叶级数、确定系数、求傅里叶级数的某点的收敛值：2003 年考了确定傅里叶级数的系数；2008 年考了将函数展成余弦级数，并求相应数项级数的和；2013 年考了求傅里叶级数在某点的收敛值。

2　无穷级数考研数一真题

1. (2003，一(3)(4 分))设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，$a_2=$ ________。

考点与解法：计算傅里叶级数的系数。根据 $a_2=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$，求定积分。

2. (2003，四(12 分))将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展成关于 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

考点与解法：将函数展成幂级数、求数项级数的和。求导，得到幂级数，再积分。根据展成的幂级数，求数项级数的和。

3. (2004，二(9)(4 分))设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，下列结论正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$；

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$。

考点与解法：正项级数敛散性和数列敛散性。利用极限性质、级数性质和比较判别法。

4. (2005，三(16)(12 分)) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数。

考点与解法：求和函数。将幂级数分成两部分，一部分是等比级数，可以直接得到和函数；另一部分两次求导化为等比级数，求和函数，再两次积分，得到原级数的和函数。

5. (2006，二(9)(4 分))若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛；　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$ 收敛；　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛。

考点与解法：判别数项级数的敛散性。利用收敛级数性质。

6. (2006，三(17)(12 分))将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成关于 x 的幂级数。

考点与解法：将函数展成幂级数。把函数 $f(x)$ 表示为两个一次分式的和，将它们展成幂级数，合并。

7.（2007，三(20)(10分)）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛，其和函数 $y=y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$。

(i) 证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$，$n=1,2,\cdots$；　　(ii) 求 $y=y(x)$ 的表达式。

考点与解法：根据和函数满足的方程，确定幂级数的系数满足的方程、求和函数。(i)将和函数代入方程中，合并，得到级数等于0，即系数为0；(ii)根据(i)确定幂级数的系数 a_n，从而求得和函数。

8.（2008，二(11)(4分)）已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域。

考点与解法：求收敛域。已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-2)^n$ 发散，于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $R=2$ 和收敛域 $(-2,2]$，所以 $-2<x-3\leqslant 2$。

9.（2008，三(19)(11分)）将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

考点与解法：将函数展成余弦级数，求相应的数项级数的和。求余弦级数的系数，根据函数展成的余弦级数，求此数项级数的和。

10.（2009，一(4)(4分)）设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛；　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散；

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)^2$ 收敛；

(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)^2$ 发散。

考点与解法：判断级数敛散性。根据级数的敛散性的性质。

11.（2009，三(16)(9分)）设 a_n 是曲线 $y=x^n$，$y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$，求 S_1，S_2 的值。

考点与解法：计算平面图形的面积、求数项级数的和。利用定积分求平面图形的面积。利用定义或构造幂级数法求数项级数的和。

12.（2010，三(18)(10分)）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

考点与解法：求和函数。提取 x 后，求导，化为等比级数，求和，再积分。

13.（2011，二(10)(4分)）设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界，则幂级

数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-1)^n$ 的收敛域为

(A) $(-1,1]$；　　(B) $[-1,1)$；　　(C) $[0,2)$；　　(D) $(0,2]$。

考点与解法：求收敛域。由已知可知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域是 $[-1,1)$，所以 $-1\leqslant x-1<1$。

14. (2012，三(17)(10 分))求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

考点与解法：求和函数。将幂级数的系数拆开 $\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}=2n+1+\dfrac{2}{2n+1}$，分为两个幂级数，求出两个幂级数的和函数。

15. (2013，一(3)(4 分))设函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$ ________。

(A) $\dfrac{3}{4}$；　　(B) $\dfrac{1}{4}$；　　(C) $-\dfrac{1}{4}$；　　(D) $-\dfrac{3}{4}$。

考点与解法：以 2 为周期的函数的傅里叶级数在一点级数的和。正弦级数，奇延拓，画出一个周期 $(-1,1]$ 上的函数图像。

16. (2013，三(16)(10 分))设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数。

(i) 证明：$S''(x)-S(x)=0$；　　(ii) 求 $S(x)$ 的表达式。

考点与解法：验证和函数满足方程、求二阶线性常系数齐次方程的解。(i)求和函数的二阶导数，利用已知条件得到(i)；(ii)解方程，确定初始条件，求特解。

17. (2014，三(19)(10 分))设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$；　　(ii) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛。

考点与解法：证明数列极限等于 0 和级数收敛。(i)由 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$，得到 $0<a_n<b_n$，根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(ii) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\dfrac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=2\,\dfrac{\sin\dfrac{b_n-a_n}{2}\sin\dfrac{b_n+a_n}{2}}{b_n}\sim\dfrac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$。

18. (2015，一(3)(4 分)) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，在 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的________。

(A) 收敛点,收敛点; (B) 收敛点,发散点;

(C) 发散点,收敛点; (D) 发散点,发散点。

考点与解法:求幂级数的收敛半径和收敛域。根据 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,知 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 收敛半径为1,收敛区间为(0,2)。

19. (2016,三(19)(10分))已知函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$,设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$,证明:

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

考点与解法:证明级数绝对收敛,证明数列收敛。(i)一般项的绝对值

$$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|。$$

利用(i)的结论,部分和数列收敛,得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。(ii)根据递推关系

$$0<x_{n+1}=f(x_n)-f(0)+1=f'(\xi)x_n+1<\frac{1}{2}x_n+1,\quad 0<\xi<x。$$

20. (2018,一(3)(4分))级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}$ 的和(　　)

(A) $\sin1+\cos1$; (B) $2\sin1+\cos1$; (C) $2\sin1+2\cos1$; (D) $2\sin1+3\cos1$。

考点与解法:求数项级数的和。将级数表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$$

利用构造幂级数法求级数的和。

21. (2019,一(3)(4分))设 $\{u_n\}$ 是单调递增的有界数列,则下列级数收敛的是(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{n_{n+1}}\right)$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$。

考点与解法:判断抽象级数的敛散性。利用举反例,排除方法。

22. (2019,二(11)(4分))求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^n$ 的和函数。

考点与解法:求和函数。将所求级数转化为已知级数,求和函数。

23. (2019,三(17)(10分))求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geqslant0)$ 与 x 轴之间图形的面积。

考点与解法:求无穷限反常积分,求数项级数的和。将图形的面积表示无穷限反常积分,再将积分表示为数项级数,求数项级数的和。

二、无穷级数考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里,关于无穷级数在考研数三真题共出了23道题,题型分布在:

1. 判断级数的敛散性:共计11个题,分布在2003年,2004年,2005年,2006年,2011

年，2012 年，2013 年，2015 年，2016 年，2017 年和 2019 年。

2. 求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域：共计 2 个题，分布在 2009 年和 2017 年(i)。

3. 求和函数：共计 7 个题，分布在 2003 年，2004 年，2005 年，2006 年，2014 年，2016 年和 2017 年(ii)。

4. 求数项级数的和：共计 2 个题，分布在 2008 年和 2019 年。

5. 将函数展成幂级数：共计 2 个题，分布在 2007 年和 2018 年。

1 无穷级数考研数三真题题型分析

1. 判断级数的敛散性：2003 年，2004 年，2005 年，2006 年和 2011 年考了利用级数性质，判断有关级数性质的正确性；2012 年考了交错级数收敛，参数所满足的条件；2013 年考了级数收敛性质以及级数收敛条件；2015 年考了判别四个数项级数敛散性；2016 年考了判别任意项级数的收敛性；2017 年考了已知收敛，确定未知常数；2019 年考了讨论抽象级数的敛散性。

2. 求收敛半径、收敛区间、收敛域：2009 年考了求幂级数的收敛半径；2017 年考了幂级数系数未知，仅仅给出递推公式，求收敛半径。

3. 求和函数：2003 年，2006 年，2014 年和 2016 年考了用转化法求和函数；2004 年考了建立方程，解方程法求和函数；2005 年考了拆分，利用转化法求和函数；2017 年考了证明和函数满足某个方程，并求和函数。

4. 求数项级数的和：2008 年考了由实际问题，建立数项级数，并求数项级数的和；2019 年考了利用等比级数求数项级数的和。

5. 将函数展成幂级数：2007 年考了将函数表示为两个一次分式的和，利用公式展成泰勒级数；2019 年考了将函数展成幂级数，求其系数。

2 无穷级数考研数三真题

1. (2003，二(3)(4 分))设 $p_n=\dfrac{1}{2}(a_n+|a_n|)$，$q_n=\dfrac{1}{2}(a_n-|a_n|)$，则

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性不确定；

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性不确定。

考点与解法：判别级数敛散性。利用绝对收敛和条件收敛的定义和性质。

2. (2003，六(9 分))求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$ $(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值。

考点与解法：求和函数，及和函数的极值。求导，化为等比级数，求和，再积分；求和函数的极值。

3. (2004，二(10)(4 分))设有以下命题：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛。

则以上命题中正确的是:

(A) (1)(2); (B) (2)(3); (C) (3)(4); (D) (1)(4)。

考点与解法:判别级数敛散性。利用收敛级数的性质和敛散性判别方法。

4. (2004,三(19)(9分))设级数 $\dfrac{x^4}{2\times4}+\dfrac{x^6}{2\times4\times6}+\dfrac{x^8}{2\times4\times6\times8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$,求:

(i) $S(x)$所满足的一阶微分方程; (ii) $S(x)$的表达式。

考点与解法:建立方程,解方程,求幂级数和函数。建立微分方程,求方程的解。

5. (2005,二(9)(4分))设 $a_n>0$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散; (B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛。

考点与解法:判别级数敛散性。根据收敛级数定义和性质。

6. (2005,三(18)(9分))求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数 $S(x)$。

考点与解法:求和函数。拆分,表示为两个级数的和,一个是等比级数,直接得到和函数;另一个乘以变量 x 后,求导,转化为等比级数。

7. (2006,二(9)(4分))题目同上小节5.(2006,二(9)(4分))题。

8. (2006,三(19)(10分))求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n+1}$ 的收敛域及其和函数 $S(x)$。

考点与解法:求和函数。将幂级数提取变量 x,二次求导,化为等比级数,求和,再两次积分。

9. (2007,三(20)(10分))将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展成 $x-1$ 的幂级数,并指出其收敛区间。

考点与解法:将函数展成泰勒级数。公式法:将函数表示为两个一次分式的和,捆绑 $x-1$,变成公式形式,利用公式。

10. (2008,三(19)(10分))设银行存款利率为 $r=0.05$,并依年复利计算。某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取19万元,第二年提取28万元,……,第 n 年提取

$(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

考点与解法：建立级数，并求和。根据实际问题的具体意义，写出第 n 年提取的量，最后将问题表示为级数，求和。

11. (2009，二(11)(4 分))求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径。

考点与解法：求幂级数的收敛半径。用系数求半径，可用比值法或根植法。

12. (2011，一(3)(4 分))设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是________

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛；

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

考点与解法：判别级数的敛散性。根据收敛级数性质和定义。

13. (2012，一(4)(4 分))已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则

(A) $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$；　(B) $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$；　(C) $1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$；　(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$。

考点与解法：条件收敛和绝对收敛定义。第一级数绝对收敛和第二个级数条件收敛，得到 α 的取值范围。

14. (2013，一(4)(4 分))设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是

(A) 若 $a_n>a_{n-1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n-1}$；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在；

(D) 若存在 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

考点与解法：判别级数敛散性。根据收敛级数的定义和性质。

15. (2014，三(18)(10 分))求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

考点与解法：求幂级数的和函数。转化法：用一个等比级数求导后转化为所求级数。或将其表示为两个级数的和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n+3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，分别求出和函数。

16. (2015，一(4)(4 分))下列级数发散的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$； (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$； (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$。

考点与解法：判别级数敛散性。利用判别级数敛散性的方法：A 用根植法，B 用转化法，C 用拆分法，D 用比值法。

17. (2016，一(4)(4分))级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$，$k$ 为常数，

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛；

(C) 发散； (D) 敛散性与 k 有关。

考点与解法：判别级数敛散性。根据 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\leqslant\dfrac{1}{n^{3/2}}$，应用比较判别法，绝对收敛。

18. (2016，三(19)(10分))求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域和和函数。

考点与解法：求幂级数的和函数。两次求导，变为等比级数，得到和函数，再二次积分。

19. (2017，一(4)(4分))若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=$

(A) 1； (B) 2； (C) -1； (D) -2。

考点与解法：收敛级数的必要条件。一般项 $\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$是$\dfrac{1}{n}$ 的高阶无穷小，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x-k\ln(1-x)}{x}=0$。

20. (2017，三(19)(10分))设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数。证明：

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于1；

(ii) $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,-1<x<1$，并求出和函数的表达式。

考点与解法：证明幂级数的收敛半径小于1；证明和函数满足某个微分方程，求幂级数的和函数。(i) 推导出 $a_n<\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{(k+1)!}<\mathrm{e}$；(ii) 验证$(1-x)S'(x)-xS(x)=0$，解微分方程，求和函数。

21. (2018，三(18)(10分))已知 $\cos 2x-\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$，求 a_n。

考点与解法：将函数展成麦克劳林级数，求级数的系数。将两个函数分别展成麦克劳林级数，合并，从而得到幂级数的系数。

22. (2019，一(4)(4分))若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛，则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 条件收敛；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 绝对收敛。

考点与解法：讨论抽象级数的敛散性。利用收敛级数的性质或反例排除法。

23.（2019，三(18)(10分)）题目同上小节23.（2019，三(17)(10分)）题。

7.7 本章练习题答案与提示

练习题 7-1 答案与提示

1. (1) 收敛。提示：$\frac{1}{n^2+n}\sim\frac{1}{n^2}$。　　(2) 收敛。提示：$\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$。

(3) 发散。提示：$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2n}$。　　(4) 收敛。提示：$\frac{2+(-1)^n}{2^{2n+1}}\sim\left(\frac{1}{4}\right)^n$。

(5) 收敛。提示：$\frac{(\ln n)^2}{n^3}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$。　　(6) 发散。提示：$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}$。

(7) 收敛。提示：$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$。　　(8) 发散。提示：$\sqrt[n]{a}-1\sim\frac{1}{n}\ln a$。

(9) 收敛。提示：实质是求 $a^x+a^{-x}-2$ 关于 x 高阶无穷小的阶数，可以证明 $a^x+a^{-x}-2\sim(x\ln a)^2$。

(10) 收敛。提示：$\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)\sim\frac{2}{n^2-1}\sim\frac{2}{n^2}$。

(11) 收敛。提示：$-\ln\cos\frac{\pi}{n}=-\ln\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)\right]\sim1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$。

(12) 收敛。提示：$\ln n>e^2\,(n>e^{e^2})$，$(\ln n)^{\ln n}>e^{2\ln n}=n^2$，$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$。

(13) 收敛。提示：$\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}}=\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\sqrt{n}}\sim\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$。

(14) 收敛。提示：$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$。

2. (1) 收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$。　(2)收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+2^n}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1/2^n+1}}=\frac{1}{2}$。

(3) 发散。$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{3^n n!}{n^n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{3}{e}>1$。

(4) 收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+2n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2n+1}=\frac{1}{2}<1$。

(5) 当 $0<x<e$ 时，收敛；当 $x>e$ 时，发散；当 $x=e$ 时，由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增，于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}>1$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，故此时级数发散。

(6) 发散。提示：一般项极限不是零。

(7) 收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\Big/\frac{n!}{(2n-1)!!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$。

(8) 发散。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi>1$。　(9)收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+(-1)^n}{4^n}}=\frac{1}{2}$。

(10) 收敛。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot\left[-\frac{n^2+1}{n(n+2)}\right]}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$。

3. (1) 绝对收敛。提示：$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$。 (2) 发散。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\neq 0$。

(3) $0<p\leqslant 1$ 条件收敛，$p>1$ 绝对收敛。提示：当 $0<p\leqslant 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，但 $u_n=\frac{1}{n^p}$ 单调递减、极限为零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛，当然条件收敛；当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，即绝对收敛。

(4) 条件收敛。提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$，且 $\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ 发散。由于 $u_n=\sin\frac{\pi}{n}$ 单调递减、极限为零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ 收敛，即条件收敛。

(5) 发散。提示：$\frac{(-1)^n n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据收敛级数的性质，其和为一般项的级数发散。

(6) 发散。提示：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\neq 0$。

(7) 绝对收敛。提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)\right|^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$，所以绝对收敛。

(8) 条件收敛。提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散；但 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调递减、极限为零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 收敛，即条件收敛。

(9) 条件收敛，提示：$\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散，而 $\{\sqrt[n]{n}-1\}$ 单调递减，极限是0，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$ 收敛，从而条件收敛。

(10) 条件收敛。提示：$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 条件收敛。

4. 提示：正项级数，由于 $\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$，级数前 n 项和 $T_n<\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{1}{S_1}$，部分和数列有上界，级数收敛。

5. 提示：用反证法。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 的一般项比的极限等于1，因此两正项级数具有相同的敛散性，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，矛盾。

6. 提示：由于 $\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$，所以此级数的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\leqslant\frac{1}{1+a_1}$，有上界，所以级数收敛。

7. 提示：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$是交错级数，于是只需证明一般项满足：(1)单调递减；(2)极限是零。事实上，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1}=0$；另外，由 $a_n>0, a_n>a_{n+1}$，很容易验证 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$，即 $u_n>u_{n+1}$。

8. 由$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，得到 $f(0)=0, f'(0)=1$。根据 $f'(x)$ 的连续性，得到 $f'(x)>0, x\in U(0)$。于是 $f\left(\frac{1}{n}\right)$单调递减$(n>N)$，且$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，根据莱布尼茨判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=f'(\xi)\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

练习题 7-2 答案与提示

1. (1) 收敛半径 $R=1$，收敛域$(-1,1)$。 (2) 收敛半径 $R=1$，收敛域$[-1,1]$。
(3) 收敛半径 $R=\infty$，收敛域$(-\infty,\infty)$。 (4) 收敛半径 $R=1$，收敛域$[-1,1]$。
(5) 收敛半径 $R=1$，收敛域$[0,2)$。 (6) 收敛半径 $R=\frac{1}{3}$，收敛域 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。
(7) 收敛半径 $R=1$，收敛域$[-1,1)$。 (8) 收敛半径 $R=3$，收敛域$[-3,3)$。

2. 收敛半径 $R=1$，收敛区间$(-2,2)$。

3. 收敛半径 $R=1$，收敛区间$(0,2)$，收敛域$[0,2)$。

练习题 7-3 答案与提示

1. (1) $-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$。提示：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，求导 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，再求积分 $S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$。

(2) $\frac{x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$。提示：由于$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，求导 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$，再乘变量 x。

(3) $\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x^2), & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0。\end{cases}$ 提示：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n}$，同乘 x，得到 $xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$，求导$[xS(x)]'=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$，积分 $xS(x)=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\ln(1-x^2)$，$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)$。当 $x=0$ 时，有 $S(0)=0$。

(4) $x+(1-x)\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$。提示：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则 $S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，两次积分，可以求得 $S(x)$。

(5) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$。提示：根据$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$，同乘变量 x，$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$，再一次求导 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$。

(6) $\frac{x^2}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x-x$，$x\in[-1,1]$。提示：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)}\right\},$$

分别求出两个幂级数的和函数。

(7) $\frac{x}{(x-1)^2}-\ln(1-x),x\in(-1,1)$。提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，分别求出两个幂级数的和函数。

(8) $-\ln(1-x)+\frac{2x-x^2}{(1-x)^2};x\in(-1,1)$。提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，分别求出三个幂级数的和函数。

2. (1) 1。提示：构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=e^x-x-1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{e^x-x-1}{x}$，再求导 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}=\frac{(e^x-1)x-e^x+1+x}{x^2}$，取 $x=1$。

(2) $\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$。提示：构造幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$，令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$，则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$，两边积分，根据 $S(0)=0$，得到(详见例3.7(10))

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^3}dx=\int_0^x\frac{1-x^2+x^2}{1+x^3}dx=\int_0^x\frac{1-x}{1-x+x^2}dx+\int_0^x\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}\ln|x^3+1|。$$

取 $x=1$，则 $S(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$。

(3) 3。提示：等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$，求导后，取 $x=1$。

(4) $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$。提示：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n-1)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}\right)$，构造两个幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n-1)}x^{n-1}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}x^{n+1}$，求它们的和函数，再取 $x=1$。

(5) $\frac{1}{2}(\cos1-\sin1)$。提示：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}=\frac{\sin x}{x}$，求导 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，除2，取 $x=1$。

(6) $\frac{128}{27}$。提示：等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^{n+2}=\frac{\frac{x^3}{4}}{1-\frac{x}{4}}=\frac{x^3}{4-x}$，求三阶导数，取 $x=1$。

3. 和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$。提示：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=S(x)$，(1) 证明级数在 $|x|<\frac{1}{2}$ 收敛。由 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}$。令 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x$，则 $x=1+\frac{1}{x}$，解得 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})<2$，所以 $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$，所以级数在 $|x|<\frac{1}{2}$ 收敛。

(2) 求和函数。由于 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，所以 $a_{n+1}x^n=a_nx^n+a_{n-1}x^n$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2},$$

所以 $S(x)-1=xS(x)+x^2S(x)$，即 $S(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$。

4. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$，则 $S(x)$ 满足方程 $S'(x)-xS(x)=1, S(0)=0$，解方程得到 $S(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}=S(1)=e^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$。

注 $\int e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+C$。

练习题 7-4 答案与提示

1. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty)$。

(2) $\dfrac{x}{x+2}=1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}}=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}x^n, x\in(-2,2)$。

(3) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)$。

(4) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{2(n+1)}x^{n+1}, x\in(-1,1)$。

(5) $\dfrac{\sin t}{t}=\dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}t^{2n}$，再求定积分

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{n-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}x^{n-1}, x\in(-\infty,+\infty)$。

(7) $\dfrac{1-\cos t}{t}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}t^{2n-1}$，$\int_0^x\dfrac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n)!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)$。

(8)
$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left((-1)^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\quad x\in(-1,1)。$$

2. (1) $\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}, x\in(0,2]$。

(2)
$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+(x-1)}-\frac{1}{2+(x-1)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n, x\in(0,2)。$$

(3)
$$x\ln(x+1)=\ln(x+1)+(x-1)\ln(x+1)=\ln[2+(x-1)]+(x-1)\ln[2+(x-1)]$$
$$=\ln 2+\ln 2(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-1)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-1)^{n+2}$$
$$=\ln 2+\ln 2(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-1)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-1)^{n+1}$$
$$=\ln 2+\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\right](x-1)^{n+1},\quad x\in(0,4]。$$

(4) $e^{\frac{x+1}{2}}=e^{\frac{x-1}{2}+1}=e\cdot e^{\frac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{2^n\cdot n!}(x-1)^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

(5) $\frac{1}{x^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+(x-1)}\right]=-\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\right]$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1}$，$x\in(0,2)$。

(6) 求导$[\arctan(x-1)]'=\frac{1}{1+(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n}$，再积分

$$\arctan(x-1)=\int_1^x[\arctan(x-1)]'dx=\int_1^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n}\right]dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{2n+1},\quad x\in(0,2]。$$

练习题 7-5 答案与提示

1. $\operatorname{sgn}x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\sin nx$，$x\in(-\pi,\pi)$，取$x=\frac{\pi}{2}$，得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$。

2. $a_0=2\pi$。$S(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\pi,\\ \pi, & x=0,\\ x+2\pi, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$ $S(2\pi)=\pi$。

3. 正弦级数 $x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx$，$x\in[0,\pi)$；

余弦级数 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$，$x\in[0,\pi]$。

4. $\pi-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$，$x\in(0,\pi]$；$S(x)=\begin{cases}\pi-x, & x\in(0,\pi],\\ -\pi-x, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x=0。\end{cases}$

考研真题答案

数一真题答案：1. 1；2. $f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$；$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$；3. B；

4. $(-1,1)$，$f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2}$，$x\in(-1,1)$；5. D；

6. $f(x)=\frac{1}{3}$，$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}-(-1)^n\right]x^n$，$|x|<1$；7. $y(x)=xe^{x^2}$；8. $(1,5]$；

9. $f(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$；10. C；11. $S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=1-\ln 2$；12. 收敛域$[-1,1]$，和函数 $x\arctan x$，$|x|\leqslant1$；13. C；14. 收敛域$(-1,1)$，和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1,\\ 3, & x=0；\end{cases}$ 15. C；16. $S(x)=2e^x+e^{-x}$；17. 略；18. B；19. 略；20. B；
21. D；22. $\cos\sqrt{x}$；23. $\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$。

数三真题答案：1. B；2. $f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，$|x|<1$；在$x=0$处取得极大值，极大值为1；3. B；

4. (i) $S(x)$ 满足的一阶方程为：$\begin{cases} S'(x) = xS(x) + \dfrac{1}{2}x^3, \\ S(0) = 0, \end{cases}$ (ii) $S(x) = -\dfrac{x^2}{2} + e^{\frac{x^2}{2}} - 1$；

5. D；6. $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}, & |x| \in (0,1), \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 7. D；

8. $[-1,1]$，$S(x) = 2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2)$，$x \in [-1,1]$；

9. $f(x) = -\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n$，$x \in (-1,3)$；

10. 3980 万元；11. e^{-1}；12. A；13. D；14. D；15. $(-1,1)$，$S(x) = \dfrac{3-x}{(1-x)^2}$，$x \in (-1,1)$；

16. C；17. A；18. $S(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)$，$x \in [-1,1]$；19. C；

20. (i) 略，(ii) $S(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$，$x \in (-1,1)$；

21. 当 n 为偶数时，$a_n = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{2^n}{n!} - n - 1\right)$，当 n 为奇数时，$a_n = (-1)^{n+1}(n+1)$；22. B；

23. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e^{\pi} - 1}$。

第 8 章

多元函数连续、偏导数、全微分及其应用

基本概念

1. 二元函数的极限、连续、偏导数、可微、全微分；
2. 极值点、极值、最值、条件极值；
*3. 方向导数、梯度；
*4. 曲线的切线、法平面；曲面的切平面、法线；曲线的切向量、曲面的法向量。

基本结论

1. 二元函数连续、偏导存在和可微的关系；
2. 有界闭区域上的二元连续函数性质；
3. 多元抽象复合函数的链式求导法则；
4. 隐函数存在定理；
5. 驻点成为极值点的充分条件。

基本方法

1. 计算二元函数的极限；
2. 证明二元函数极限不存在；
3. 求多元函数的偏导数；
4. 求多元函数的全微分；
5. 讨论二元函数的连续性、偏导存在性和可微性；
6. 求抽象复合函数的偏导数；
7. 求隐函数和*隐函数组的偏导数；
*8. 求多元函数的方向导数和梯度；
9. 求二元函数的极值(无条件极值)；
10. 求多元函数的条件极值；
11. 求二元函数在有界闭区域上的最值；
*12. 求空间曲线的切线和法平面方程；
*13. 求曲面的切平面和法线方程。

8.1　多元函数连续、偏导数和全微分

一、基本概念

定义 1　极限　当点 (x,y) 以任何方式趋于点 (x_0,y_0)时，函数值 $f(x,y)$ 无限趋于固定常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**极限**，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$。

定义 2　连续　如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**。

或定义：若 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$，则称函数 $z=f(x,y)$在点 (x_0,y_0)处**连续**。

定义 3　偏导数　设 $z=f(x,y)$，固定 $y=y_0$，函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$的导数，就称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于变量 x 的**偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f'_x(x_0,y_0)\quad 或\quad z'_x(x_0,y_0),$$

也就是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}。$$

类似地，固定 $x=x_0$，函数 $z=f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$的导数，就是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于变量 y 的**偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f'_y(x_0,y_0)\quad 或\quad z'_y(x_0,y_0),$$

也就是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}。$$

定义 4　可微　设函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域有定义，如果全改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A,B$ 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，则称函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)**可微**，并称**线性主部** $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**全微分**，记为 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$，$\mathrm{d}z(x_0,y_0)$，或 $\mathrm{d}z|(x_0,y_0)$，也就是

$$\mathrm{d}z(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y。$$

定义 5　全微分

(1) 函数 $z=f(x,y)$的全微分：$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$；

(2) 函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的全微分：$\mathrm{d}z(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$。

偏导数的几何意义：$f'_x(x_0,y_0)$是曲面 $z=f(x,y)$与平面 $y=y_0$ 交线上的点(x_0,y_0,z_0)处的切线关于 x 轴的斜率。$f'_y(x_0,y_0)$具有类似的几何意义。

可微的几何意义：函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)是可微，则在曲面 $z=f(x,y)$上的点(x_0,y_0,z_0)存在切平面。

二、基本结论

定理1(二元函数连续、偏导存在和可微关系)

(1) 若 $f(x,y)$可微,则 $f(x,y)$连续,且偏导存在;

(2) 若 $f(x,y)$ 偏导存在,$f(x,y)$未必连续,也未必可微;

(3) 若 $f(x,y)$ 偏导存在,且偏导函数连续,则 $f(x,y)$ 可微。

定理2(偏导和顺序无关)　若二阶混合偏导连续,则二阶混合偏导相等。

定理3(二元连续函数的性质)

(1) **有界性**　若二元函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上有界,即存在 $M>0$,使得 $|f(x,y)|\leqslant M, \forall (x,y)\in D$。

(2) **最值性**　若二元函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上可以取到最大值 M 和最小值 m,即 $\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ 使得 $f(x_1,y_1)=m, f(x_2,y_2)=M$。

(3) **介值性**　若二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续,则对 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ 和 $\forall C: f(x_1,y_1)<C<f(x_2,y_2)$,都存在点 $(x_0,y_0)\in D$,使得 $f(x_0,y_0)=C$。

(4) **零点定理**　若二元函数 $f(x,y)$在区域 D 上连续,对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,若 $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$,则存在 $(x_0,y_0)\in D$,有 $f(x_0,y_0)=0$。

定理4(二元初等函数的连续性)　二元初等函数在定义区域内都是连续的。

注　由变量 x 的一元基本初等函数和变量 y 的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的函数称为**二元初等函数**。

三、讨论二元函数极限、连续、偏导和微分的基本方法

题型1　求二元函数的极限

计算二元函数的极限一般都是利用一元函数的极限性质和计算方法:

(1) 将二元函数极限转换成或看成一元函数的极限;

(2) 放大和缩小(放缩),利用夹逼法则;

(3) 原点的极限,可以做极坐标变换(这是求二元函数极限特有的方法)。

例8.1　求下列二元函数的极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$。

解　(1) 根据无穷小与有界函数的积是无穷小,则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\frac{1}{y}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\cos\frac{1}{x}=0。$$

(2) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$,则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,有 $r\to 0$, θ 任意。于是有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0}r(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=0$。

题型2　证明二元函数极限不存在

证明二元函数极限不存在有两个方法:

(1) 找一条通过极限点的路线(直线或曲线)使极限不存在;

(2) 找两条通过极限点的不同的路线(直线或曲线)使极限不相等。

例 8.2 证明下列二元函数在点 $O(0,0)$ 的极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$。

解 (1) 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴($y=0$)路径趋近于 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0。$$

当点 $P(x,y)$沿 $x=y$ 路径趋近于 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}。$$

因此,当 $P(x,y)\to O(0,0)$时,$f(x,y)$的极限不存在(沿不同路线函数值趋于不同常数)。

(2) 当 $P(x,y)$ 沿 y 轴($x=0$)路径趋于 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0。$$

当 $P(x,y)$沿 $y=x^2$路径趋于 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\frac{1}{2}。$$

因此,当 $P(x,y)\to O(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不存在。

注 称 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$**是二元函数的极限**,又称**二重极限**;称

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y),\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)$$

是二元函数的**二次极限或累次极限**。二重极限与二次极限是不同的两个概念,不能相互代替,有时二重极限存在,而累次极限不存在,如例 8.1(1);有时累次极限存在,而二重极限不存在,如例 8.2(1)。仅当二者都存在时,两类极限相等。

题型 3　求多元函数的偏导数

求多元函数在一点的偏导数有两个方法:

(1) **定义法**:用偏导数的定义求一点的偏导数;

(2) **公式法**:求出偏导函数,再求这点的偏导函数值。

例 8.3 求 $z=x^2+xy+y^2$ 在点$(1,-1)$的关于 x 和 y 的偏导数。

解 【公式法】对变量 x 求偏导数时,把 y 看成常量,有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y$。同样,对变量 y 求偏导数时,把 x 看成常量,有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y$。于是有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)}=(2x+y)\big|_{(1,-1)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)}=(x+2y)\big|_{(1,-1)}=1。$$

注 对多元函数的某个自变量求偏导时,把“**其他自变量**”都看作常量。所以求偏导的运算实质就是求导的运算。

例 8.4 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的偏导数。

解 【定义法】根据偏导数的定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\sin\frac{1}{\Delta y^2}\quad(\text{不存在})。$$

于是，函数在点(0,0)处关于 x 偏导数是0，关于 y 的偏导数不存在。

注 此题的二元函数是分段函数，不能用公式法求分段点的偏导数。

题型 4 求多元函数的全微分

计算函数的全微分或函数在一点的全微分有两个方法：

方法 1 根据全微分公式，见定义5；

方法 2 利用微分形式不变性，对方程两边求微分。

例 8.5 设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，$\varphi$ 可微，求 $\mathrm{d}z$。

解 【方法1】利用微分形式不变性：对方程两边求微分

$$2x\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}z=\varphi\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}y+y\varphi'\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)=\varphi\mathrm{d}y+\varphi'\mathrm{d}z-\varphi'\frac{z}{y}\mathrm{d}y,$$

所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{-2x\mathrm{d}x+\left(\varphi-\dfrac{z}{y}\varphi'\right)\mathrm{d}y}{2z-\varphi'}=\dfrac{-2x}{2z-\varphi'}\mathrm{d}x+\dfrac{y\varphi-z\varphi'}{(2z-\varphi')y}\mathrm{d}y$。

【方法2】利用全微分公式：首先求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。对方程 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$ 两边变量 x 求偏导，另一个自变量 y 是常量，z 是因变量，是自变量 x 的函数。于是有

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\frac{\partial z}{\partial x},$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{\varphi'-2z}$。同样，对方程两边变量 y 求偏导，则有

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\varphi-\varphi'\frac{z}{y}+\varphi'\frac{\partial z}{\partial y},$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z\varphi'-y\varphi}{(\varphi'-2z)y}$。所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{2x}{\varphi'-2z}\mathrm{d}x+\dfrac{z\varphi'-y\varphi}{(\varphi'-2z)y}\mathrm{d}y$。

注 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，也可用公式，即设 $F(x,y,z)=x^2+z^2-y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}。$$

对比这两个解题方法，显然方法1，方程两边求微分计算全微分更简单些。

例 8.6 设 $z=f(u)$ 可微，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，$z=f(4x^2-y^2)$，求 $\mathrm{d}z(1,2)$。

解 由于 $dz=f'(u)du=f'(4x^2-y^2)d(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)(8xdx-2ydy)$，所以

$$dz(1,2)=f'(0)(8dx-4dy)=4dx-2dy。$$

例 8.7 设 $z=u^v, u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\frac{y}{x}$，求 dz。

解 【方法 1】利用全微分公式：首先求$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(vu^{v-1})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+(u^v\ln u)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{u^v}{x^2+y^2}\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=(vu^{v-1})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+(u^v\ln u)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{u^v}{x^2+y^2}\left(\frac{yv}{u}-x\ln u\right);$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{u^v}{x^2+y^2}\left[\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right)dx+\left(\frac{yv}{u}-x\ln u\right)dy\right]。$$

【方法 2】利用微分形式不变性：对方程两边求微分

$$dz=du^v=de^{v\ln u}=u^v\left(\ln u dv+\frac{v}{u}du\right),$$

$$du=d(\ln\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{2(x^2+y^2)}(2xdx+2ydy)=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2},$$

$$dv=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

所以 $dz=\frac{u^v}{x^2+y^2}\left[\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right)dx+\left(\frac{yv}{u}-x\ln u\right)dy\right]$。

注 当然本题可以通过复合，使其成为二元函数，再求微分。

题型 5 讨论二元函数连续性、偏导存在性和可微性

讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的连续性、偏导存在性和可微性的基本方法：

1. 连续性：只需检验这点的极限是否等于这点的函数值；
2. 偏导存在性：利用偏导定义求这点的偏导数；
3. 可微性：利用可微性的定义。

根据可微的定义，若全改变量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 能表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 是和 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常量，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则可微。若可微，则

$$A=f'_x(x_0,y_0),\quad B=f'_y(x_0,y_0)。$$

于是我们得到**证明可微的具体方法**：

(1) 计算偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$；

(2) 计算 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 和 $f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$；

(3) 求极限

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

若极限等于0,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微,否则不可微。

注 根据可微的必要条件,若偏导数有一个不存在,则不可微。

例 8.8 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的连续性、偏导存在性和可微性。

解 首先讨论连续性。令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0=f(0,0)。$$

根据连续定义,函数 $f(x,y)$在点(0,0)处连续。

其次讨论偏导存在性。根据偏导数的定义,有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0。$$

类似地得到 $f'_y(0,0)=0$,所以函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点的两个偏导数都存在。

最后讨论可微性。根据验证可微的具体方法,选取 $\Delta x=\Delta y$ 路径使 $\rho\to 0$,则有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}\neq 0。$$

于是,函数 $z=f(x,y)$在(0,0)不可微。

例 8.9 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的连续性、偏导存在性和可微性。

解 首先讨论连续性。由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)。$$

根据连续定义,函数 $f(x,y)$在(0,0)点连续。

下面讨论偏导存在性。根据偏导数的定义,有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}=0。$$

类似地得到 $f'_y(0,0)=0$,所以函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 点的两个偏导数都存在。

最后讨论可微性。由于

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\ &=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0。\end{aligned}$$

于是，函数 $z=f(x,y)$ 在$(0,0)$点可微。

题型 6 求抽象复合函数的偏导数

求复合函数的偏导数和高阶偏导数需要：

(1) **明确复合函数的自变量、中间变量以及中间变量的个数**

如果复合函数是具体函数，中间变量的个数根据中间变量“数量”确定；如果复合函数是抽象函数，中间变量的个数由“项数”确定。

例如：函数 $u=f(x+y,xy,x-y)$ 有三个中间变量；而 $u=f(x+y+z,xyz)$ 只有两个中间变量。

关于**全导和偏导**：如果是一元函数，函数对自变量的导数就是**全导**；如果是多元函数，函数对某个自变量的导数就是**偏导**。

(2) **链式求导法则**

函数对某一自变量的**偏导(全导)等于**：该函数对第一个中间变量的偏导**乘以**第一个中间变量对此自变量的偏导(全导)，**加**这个函数对第二个中间变量的偏导**乘以**第二个中间变量对此自变量的偏导(全导)，等等，直至**加**这个函数对最后一个中间变量的偏导**乘以**最后一个中间变量对该自变量的偏导(全导)。

(3) **关于中间变量的偏导的表示**

设函数 $z=f(u,v,w)$，函数对 u 的偏导可表示为$\frac{\partial f}{\partial u}$，$f'_u$和$f'_1$。在解题过程中，用 f'_1表示比较方便。特别地，若中间变量不是单独一个字母，只能用位置来表示，即 f'_1，这里的 1 表示第一个中间变量。

(4) **关于中间变量的高阶偏导的表示**

当对一阶偏导函数如 f'_1的某自变量再求偏导时，把 f'_1当作普通的函数符号，自变量和中间变量以及中间变量的个数和函数 f 完全相同，这与一元复合函数是一致的。如

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x),$$

那么导函数 $f'[g(x)]$ 也是一个复合函数，它的自变量和中间变量和原函数 $f[g(x)]$是相同的。于是对偏导函数 f'_1的第几个中间变量求偏导，就在符号 f'_1后面下角标添加数字和上角标添加偏导符号(撇)。如对 f'_1的第二个中间变量求偏导，我们就在 f'_1后面下角标添加“2”和上角标添加“$'$”，记作 f''_{12}。当然二阶偏导数的自变量、中间变量和中间变量个数与函数 f 也是完全相同的！

例 8.10 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$。

解 由于$\frac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2$，对偏导函数$\frac{\partial w}{\partial x}$中的自变量 z 求偏导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}(f'_1+yzf'_2)=\frac{\partial}{\partial z}f'_1+\frac{\partial}{\partial z}(yzf'_2)=\frac{\partial}{\partial z}f'_1+yf'_2+yz\frac{\partial}{\partial z}f'_2\\&=f''_{11}+xyf''_{12}+yf'_2+yz(f''_{21}+xyf''_{22})\\&=f''_{11}+y(x+z)f''_{12}+xy^2zf''_{22}+yf'_2。\end{aligned}$$

事实上，$f'_1=f'_1(x+y+z,xyz)$，$f'_2=f'_2(x+y+z,xyz)$，当计算$\frac{\partial}{\partial z}(yzf'_2)$时，应看作两个函数 yz 和 f'_2的积对 z 的偏导数。

由于 f 具有二阶连续偏导数，所以二阶混合偏导相等，即 $f''_{12}=f''_{21}$。一般地，对二阶偏导数连续的利用，更多的是混合偏导相等。

例 8.11 设 $z=f\left(\frac{x}{y},x^2+y^2\right)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 根据链式求导法则，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'+2xf_2'$。

对偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 中的 x 求偏导，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}f'_1+2xf'_2\right)=\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}f'_1+\frac{\partial}{\partial x}(2xf'_2)\\&=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}f''_{11}+2xf''_{12}\right)+2f'_2+2x\left(\frac{1}{y}f''_{21}+2xf''_{22}\right)\\&=\frac{1}{y^2}f''_{11}+\frac{4x}{y}f''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2。\end{aligned}$$

对偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 中的 y 求偏导，由于 f 的二阶偏导函数连续，于是 $f''_{12}=f''_{21}$。从而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}f'_1+2xf'_2\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}f'_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}(2xf'_2)\\&=-\frac{1}{y^2}f'_1+\frac{1}{y}\left(-\frac{x}{y^2}f''_{11}+2yf''_{12}\right)+2x\left(-\frac{x}{y^2}f''_{21}+2yf''_{22}\right)\\&=-\frac{1}{y^2}f'_1-\frac{x}{y^3}f''_{11}+2\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)f''_{12}+4xyf''_{22}。\end{aligned}$$

题型 7 求隐函数和* 隐函数组的偏导数

情形 1 求由方程 $F(x,y)=0$ 确定了一元隐函数 $y=y(x)$ 的导数的具体方法：

(1) 公式法：$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$；

(2) 对方程两边对变量 x 求导，将 y 看作变量 x 的函数；

(3) 对方程两边求微分。

情形 2 求由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的二元隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数的具体方法：

(1) 公式法：$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$，$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$；

(2) 对方程两边对变量 x 和 y 求偏导，将 z 看作变量 x 和 y 的函数；

(3) 对方程两边求微分。

*** 情形 3** 由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定的一元隐函数组 $\begin{cases}z=z(x),\\y=y(x)\end{cases}$ 的导数：

(1) 对方程两边，分别对变量 x 求偏导，此时 y,z 都是 x 的函数，则有

$$\begin{cases}F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\G'_x+G'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0。\end{cases}$$

用克莱姆法则解关于 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的线性方程组，求出 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（2）对方程两边求微分，则有

$$\begin{cases} F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y + F'_z\mathrm{d}z = 0, \\ G'_x\mathrm{d}x + G'_y\mathrm{d}y + G'_z\mathrm{d}z = 0。\end{cases}$$

用克莱姆法则解关于 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的线性方程组，求出 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$。从此得到$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

*** 情形 4** 由方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$确定二元隐函数组$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y) \end{cases}$的偏导数：

（1）对方程两边，分别对变量 x 求偏导，此时 u,v 都是 x 的函数，y 常量，则有

$$\begin{cases} F'_x + F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G'_x + G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0。\end{cases}$$

用克莱姆法则解关于$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组，则求出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$；用类似的方法，再建立一个线性方程组，求出$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$。

（2）对方程两边求微分，则有

$$\begin{cases} F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y + F'_u\mathrm{d}u + F'_v\mathrm{d}v = 0, \\ G'_x\mathrm{d}x + G'_y\mathrm{d}y + G'_u\mathrm{d}u + G'_v\mathrm{d}v = 0。\end{cases}$$

用克莱姆法则解关于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的线性方程组，求出 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$。其解形式如下：

$$\mathrm{d}u = \Delta_1\mathrm{d}x + \Delta_2\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}v = \Delta_3\mathrm{d}x + \Delta_4\mathrm{d}y。$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta_3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta_4。$$

例 8.12 求由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+xy=1$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的导数。

解 【方法 1】公式法：设 $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}+xy-1$，则

$$F'_x(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + y, \quad F'_y(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x,$$

所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}+y}{\mathrm{e}^{x+y}+x}$。

【方法 2】两边求导：方程两边对变量 x 求导，y 是 x 的函数，得到

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y') + y + xy' = 0,$$

于是 $y'=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}+y}{\mathrm{e}^{x+y}+x}$。

【方法 3】两边微分：$\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$，于是 $(\mathrm{e}^{x+y}+x)\mathrm{d}y=-(\mathrm{e}^{x+y}+y)\mathrm{d}x$，解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}+y}{\mathrm{e}^{x+y}+x}$。

例 8.13 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，$f$ 和 φ 具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

解 【方法 1】链式求导法：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，且

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^y\cos x+\varphi_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\varphi_2')$，于是$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'+\cos x f_y'-\frac{1}{\varphi_3'}f_z'(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\varphi_2')$。

【方法 2】方程两边求微分：对上述三个方程两边求微分，则有

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z,\quad 2x\varphi_1'\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\varphi_2'\mathrm{d}y+\varphi_3'\mathrm{d}z=0,\quad \mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x,$$

消去 $\mathrm{d}y$,$\mathrm{d}z$ 得到 $\mathrm{d}u=\left[f_x'+\cos x f_y'-\frac{1}{\varphi_3'}f_z'(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\varphi_2')\right]\mathrm{d}x$。

例 8.14 设 $u=f(x,y,z)$具有连续的偏导数，$z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$确定，求 $\mathrm{d}u$。

解 【方法 1】由于 $\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z$。对方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$两边求微分

$$(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(y+1)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(z+1)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z,$$

所以 $\mathrm{d}z=\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(z+1)\mathrm{e}^z}\mathrm{d}x-\frac{(y+1)\mathrm{e}^y}{(z+1)\mathrm{e}^z}\mathrm{d}y$，于是

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\left[\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(z+1)\mathrm{e}^z}\mathrm{d}x-\frac{(y+1)\mathrm{e}^y}{(z+1)\mathrm{e}^z}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\left[f_x'+f_z'\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(z+1)\mathrm{e}^z}\right]\mathrm{d}x+\left[f_y'-f_z'\frac{(x+1)\mathrm{e}^y}{(z+1)\mathrm{e}^z}\right]\mathrm{d}y。$$

【方法 2】$u=f(x,y,z)$是复合函数，自变量是 x,y。于是根据函数的全微分公式有 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$。根据复合函数的链式法则，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_z'\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_y'+f_z'\frac{\partial z}{\partial y}$$

由于$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(z+1)\mathrm{e}^z}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(y+1)\mathrm{e}^y}{(z+1)\mathrm{e}^z}$，所以

$$\mathrm{d}u=\left[f_x'+f_z'\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(z+1)\mathrm{e}^z}\right]\mathrm{d}x+\left[f_y'-f_z'\frac{(y+1)\mathrm{e}^y}{(z+1)\mathrm{e}^z}\right]\mathrm{d}y。$$

例 8.15 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，根据隐函数求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{2y}{2z-4}=\frac{y}{2-z},$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{x}{(2-z)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{(2-z)^3}。$$

* **例 8.16** 设 $xu-yv=0$,$yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$ 和$\frac{\partial v}{\partial y}$。

解 把 u,v 看成 x,y 的函数，将方程组的每个方程两边分别对 x 求偏导，得

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v。\end{cases}$$

用克莱姆法则解关于$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组，解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-u & -y\\ -v & x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}x & -u\\ y & -v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}。$$

用同样的方法,将方程组的每个方程两边分别对 y 求偏导数,建立偏导的线性方程组,可解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}。$$

例 8.17 设 $y=f(x,t)$,t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解 【方法 1】根据链式求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=f'_x+f'_t\frac{\partial t}{\partial x},$$

对方程 $F(x,y,t)=0$ 两边的变量 x 求偏导,y,t 都是 x 的函数,则有

$$F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_t\frac{\partial t}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{1}{F'_t}\left(F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

于是有$-F'_t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-F'_tf'_x+f'_t\left(F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$,所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{F'_tf'_x-f'_tF'_x}{f'_tF'_y+F'_t}$。

【方法 2】对方程组$\begin{cases}y-f(x,t)=0,\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$的每个方程两边对变量 x 求偏导,y,t 都是 x 的函数,则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-f'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f'_x,\\ F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-F'_x,\end{cases}$$

解关于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$的线性方程组,得到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}f'_x & -f'_t\\ -F'_x & F'_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -f'_t\\ F'_y & F'_t\end{vmatrix}}=\frac{F'_tf'_x-F'_xf'_t}{F'_t+F'_yf'_t}$。

【方法 3】对方程组$\begin{cases}y-f(x,t)=0,\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$的每个方程两边求微分,则有

$$\begin{cases}\mathrm{d}y-f'_x\mathrm{d}x+f'_t\mathrm{d}t=0,\\ F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_y\mathrm{d}t=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}\mathrm{d}y+f'_t\mathrm{d}t=f'_x\mathrm{d}x,\\ F'_y\mathrm{d}y+F'_t\mathrm{d}t=F'_x\mathrm{d}x,\end{cases}$$

解关于 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}t$ 的线性方程组,得到

$$\mathrm{d}y=\frac{\begin{vmatrix}f'_x\mathrm{d}x & -f'_t\\ -F'_x\mathrm{d}x & F'_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -f'_t\\ F'_y & F'_t\end{vmatrix}}=\frac{F'_tf'_x-F'_xf'_t}{F'_t+F'_yf'_t}\mathrm{d}x,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{F'_tf'_x-F'_xf'_t}{F'_t+F'_yf'_t}。$$

*题型 8 求多元函数的方向导数和梯度

定义 6 方向导数 称

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

是 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的**方向导数**，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦。

方向导数的几何意义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 表示在曲面 $z=f(x,y)$上的点(x_0,y_0,z_0)沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率。$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 的绝对值越大，在点(x_0,y_0)处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化越快；反之，变化越慢。

定义 7　梯度　称向量

$$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0))=f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

是函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的**梯度**。

定理 5　方向导数和梯度关系

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}&=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta\\&=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l=|\mathrm{grad}f(x_0,y_0)|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{e}_l$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量，$\theta=(\widehat{\mathrm{grad}f(x_0,y_0),\boldsymbol{e}_l})$是点$(x_0,y_0)$的梯度与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角。

定理 6　关于方向导数的基本结论

设 θ 是函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$与 $\boldsymbol{l}$ 方向的夹角：

(1) 当 $\theta=0$ 时，即当 $\boldsymbol{l}$ 方向与梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$的方向相同时，函数 $f(x,y)$增加最快(变化最快)，此时方向导数达到最大值，其最大值等于梯度的模，即

$$\max_{l}\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}\right\}=|\mathrm{grad}\ f(x_0,y_0)|。$$

(2) 当 $\theta=\pi$ 时，即当 $\boldsymbol{l}$ 方向与梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$的方向相反时，函数 $f(x,y)$减少最快(变化最快)，此时方向导数达到最小值，其最小值等于梯度模的相反数，即

$$\min_{l}\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}\right\}=-|\mathrm{grad}f(x_0,y_0)|。$$

(3) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，即当 $\boldsymbol{l}$ 方向与梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$的方向正交(垂直)时，函数 $f(x,y)$变化率为零，即$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=0$。

例 8.18　求函数 $z=xe^{2y}$在点 $P(1,0)$处沿从点 $P(1,0)$到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

解　$\boldsymbol{l}$ 方向的方向向量为$\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$，$\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$。又由于

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2x\,e^{2y}\right|_{(1,0)}=2。$$

于是有$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,0)}=1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

例 8.19　设 $f(x,y)=xy+x+y$，求：

(1) $f(x,y)$在点$(1,1)$ 处增加最快的方向以及沿此方向的方向导数；

(2) $f(x,y)$在点$(1,1)$ 处减少最快的方向以及沿此方向的方向导数；

(3) $f(x,y)$在点$(1,1)$ 处变化率为零的方向。

解 (1) 设 $f(x,y)$在点(1,1)处增加最快的方向为 $\boldsymbol{n}_1$，则

$$\boldsymbol{n}_1 = \mathrm{grad}f(1,1) = (y+1,x+1)\Big|_{(1,1)} = (2,2),$$

沿 $\boldsymbol{n}_1$ 方向的方向导数为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_1}\right|_{(1,1)} = |\mathrm{grad}f(1,1)| = 2\sqrt{2}$。

(2) 设 $f(x,y)$ 在点(1,1)处减少最快的方向为 $\boldsymbol{n}_2$，则

$$\boldsymbol{n}_2 = -\mathrm{grad}f(1,1) = -(y+1,x+1)\Big|_{(1,1)} = -(2,2),$$

沿 $\boldsymbol{n}_2$ 方向的方向导数为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_2}\right|_{(1,1)} = -|\mathrm{grad}f(1,1)| = -2\sqrt{2}$。

(3) 设 $f(x,y)$ 在点(1,1)处变化率为零的方向就是梯度的正交方向，即

$$\boldsymbol{n}_3 = (-1,1) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{n}_4 = (1,-1)。$$

练习题 8-1

1. 求下列二元函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{2-e^y}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy+x^2}$。

2. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{xy+(x-y)^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$。

3. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^2y+xy^2$；　　(2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$；

(3) $z=\sin xy+\cos(x-y)$；　　(4) $z=\ln\arctan xy$。

4. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=x^2+y^2+xy$；　　(2) $z=\arctan xy$；

(3) $z=y^x$；　　(4) $z=\ln(x+y)$。

5. 求曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线和 x 轴正向的夹角。

6. 设 f 具有二阶连续偏导数(导数)，求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=f(x,xy)$；　　(2) $z=f\left(x+y,\dfrac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy,x+y,x-y)$；　　(4) $z=f(x^2+y^2)$。

7. 求下列函数的全微分：

(1) 由方程 $xz-xyz+\ln(xyz)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$的全微分；

(2) 设 $u=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{y}{z}\right)$，求 $\mathrm{d}u$ 和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$；

(3) 设 $z=z(x,y)$是由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$,求 dz 和$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

注 以下的8题~13题、22题和23题是数一内容:

*8. 求函数 $u=xy+yz+zx$ 在点(1,1,2)处沿方向角 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。

*9. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5,1,2)到点(9,4,14)方向的方向导数。

*10. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 (x_0,y_0,z_0) 处,沿球面在该点的外法线方向的方向导数。

*11. 求下列函数的梯度:

(1) 函数 $u=xy+yz+zx$ 在点(1,0,1)处的梯度;

(2) 函数 $u=x+y+z$ 在点(0,0,0)处的梯度。

*12. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数:

(1) $u=xyz$ 在点(1,1,1)沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$;

(2) $u=x^2-xy+z^2$ 在(1,0,1)点沿点(1,0,1)到点(3,-1,3)的方向。

*13. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点(1,1)沿与 x 轴正向成 α 角的射线 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数。问:α 为何值时,方向导数(1)有最大值;(2)有最小值;(3)等于0。

14. 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)不连续。

15. 讨论函数 $f(x,y)=\frac{x-y}{x^3-y^3}$ 的连续性。

16. 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点沿每一条射线 $x=t\cos\theta,y=t\sin\theta(0\leqslant t<+\infty)$ 连续,但它在(0,0)点不连续。

17. 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点连续,偏导数存在,但不可微。

18. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$,其中 $\varphi(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内连续,问:

(1) 在什么条件下,$f(x,y)$在点(0,0)的偏导存在?

(2) 在什么条件下,$f(x,y)$在点(0,0)可微?

19. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

证明：偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点(0,0)连续。

20. 已知 $x-az=\varphi(y-bz)$，φ 可导，求证：$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$。

21. 设 $G(u,v)$ 具有连续的偏导数，证明：由方程 $G(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$。

*22. 设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，且 $f''_{11}+f''_{22}=1$，验证函数 $f(x^2-y^2,2xy)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4$。

*23. 设 $v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u^2-v=3x+y,\\u-2v^2=x-2y\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$。

24. 设 $u=f(x,y,z)$，$y=g(x,t)$，$t=\varphi(x,z)$，其中 f,g,φ 都是可微函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$。

8.2 多元函数的极值与最值

一、基本概念

定义 8 极值与极值点 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域 $U(x_0,y_0)$ 内有定义，若对于任意的 $(x,y)\in\mathring{U}(x_0,y_0)$，有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)\quad (f(x,y)<f(x_0,y_0)),$$

则称 (x_0,y_0) 是函数 $f(x,y)$ 的**极小值点**(**极大值点**)，函数值 $f(x_0,y_0)$ 是**极小值**(**极大值**)。极大值和极小值统称为**极值**；极大值点和极小值点统称为**极值点**。

定义 9 条件极值 称函数 $u=f(x,y,z)$ 在对自变量附有条件的极值称为**条件极值**。

定义 10 稳定点 方程组 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解，称为函数 $f(x,y)$ 的**稳定点**，又称**驻点**。

二、基本方法

题型 9 求二元函数的极值点和极值

求二元函数的极值点的具体方法：

1. 求稳定点：求方程组 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解，设 (x_0,y_0) 为此方程组的一组解。

2. 判断稳定点 (x_0,y_0) 是否为极值点：求函数在 (x_0,y_0) 点的二阶偏导数

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)。$$

(1) 若判别式 $\Delta=B^2-AC<0$，则 (x_0,y_0) 是极值点，若 $A>0$(或 $C>0$)，则 (x_0,y_0) 是极小值点，若 $A<0$(或 $C<0$)，则 (x_0,y_0) 是极大值点；

(2) 若判别式 $\Delta=B^2-AC>0$，则 (x_0,y_0) 不是极值点；

(3) 若判别式 $\Delta=B^2-AC=0$，不确定，(x_0,y_0) 可能是极值点，也可能不是极值点。

例 8.20 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的

极值。

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$，根据隐函数的求导公式，有

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1-x}{z-2},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{1+y}{z-2}。$$

令 $z'_x=0$，$z'_y=0$，解得驻点是 $(1,-1)$，代入原方程，得到 $z^2-4z-12=0$。此方程的解是 $z_1=6$ 和 $z_2=-2$。再求二阶偏导，有

$$z''_{xx}=-\frac{z-2+(1-x)z'_x}{(z-2)^2};\quad z''_{yy}=-\frac{z-2+(1+y)z'_y}{(z-2)^2};\quad z''_{xy}=-\frac{(1-x)z'_x}{(z-2)^2}。$$

(1) 在点$(1,-1,6)$处，$A=-\frac{1}{4}$，$B=0$，$C=-\frac{1}{4}$，判别式 $\Delta=B^2-AC<0$。根据 $A<0$ 知，$(1,-1)$ 是极大值点，极大值是 $z(1,-1)=6$。

(2) 在点$(1,-1,-2)$处，$A=\frac{1}{4}$，$B=0$，$C=\frac{1}{4}$，判别式 $\Delta=B^2-AC<0$。根据 $A>0$ 知，$(1,-1)$ 是极小值点，极小值是 $z(1,-1)=-2$。

题型10 求多元函数的条件极值或最值

计算条件极值，常用拉格朗日乘数法，具体方法是：

求目标函数 $f(x,y,z)$ 在 $g_1(x,y,z)=0$ 和 $g_2(x,y,z)=0$ 的条件下的极值或最值，分三个步骤：

1. 引入拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z);$$

2. 求偏导函数，并令其等于0，建立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}=0;\end{cases}$$

3. 求方程组的解，解为 (x_0,y_0,z_0)。

一般地，若这样的解唯一，根据实际问题，若实际问题只有最大值，则该点就是最大值点；若实际问题只有最小值点，则该点就是最小值点。若有两个解，根据实际问题，若实际问题既有最大值，又有最小值，则这两点的函数值一个是最大值，另一个是最小值。

例8.21 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，求这个椭圆上的点到原点的最长和最短距离。

解 设(x,y,z)是椭圆上的任意一点，实际问题是求目标函数

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$ 下的最大值和最小值问题。为了计算的方便，我们只要计算函数 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的条件最值，就可以得到 $f(x,y,z)$ 的条件最值。

建立拉格朗日函数：

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1),$$

求拉格朗日函数对 x,y,z,λ,μ 的偏导数，并使之为零

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ L'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ L'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ L'_\mu=x+y+z-1=0。\end{cases}$$

由前两个方程得到 $x=y$，从而得到 $z=2x^2$，于是方程组的解是

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right); \quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)。$$

它们是函数 $g(x,y,z)$ 在约束条件下的可能极值点。当然也是目标函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件下的可能极值点，根据问题的实际意义，函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件下，一定有最大值和最小值，因此两点的函数值

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{9-\sqrt{3}} \quad 和 \quad f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)=\sqrt{9+\sqrt{3}}$$

分别是椭圆上的点到原点的最短距离和最长距离。

题型 11　求二元函数在有界闭区域上的最值

求二元函数在有界闭区域上的最值的具体方法：

1. 求二元函数在区域内部的驻点及偏导数不存在的点及函数值；

2. 求二元函数在边界上的最值；

3. 比较上述点的函数值和边界最值，最大者就是函数在这个区域上的最大值；最小者就是函数在这个区域上的最小值。

例 8.22　求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴，y 轴和直线 $x+y=6$ 所围成的闭区域上的极值、最大值和最小值。

解　求函数 $f(x,y)$ 在闭区域内部的驻点。首先求函数 $f(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f'_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0, \end{cases}$$

解方程组，得到驻点 $(2,1)$，$(4,0)$，由于 $(4,0)$ 在边界上，于是区域内部的驻点为 $(2,1)$。由于

$$A=f''_{xx}(2,1)=(8y-6xy-2y^2)\big|_{(2,1)}=-6<0,$$

$$B=f''_{xy}(2,1)=(8x-3x^2-4xy)\big|_{(2,1)}=-4,$$

$$C=f''_{yy}(2,1)=-2x^2\big|_{(2,1)}=-8<0,$$

所以 $B^2-AC=-32<0$ 且 $A<0$，因此 $(2,1)$ 是极大值点，极大值为 $f(2,1)=4$。

接下来，求函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 的边界上的最值。如图8-1所示：①在边界线段 OA 和 OB 上，所有点的函数值 $f(x,y)=0$；②在线段 AB 上，AB 的方程为 $x+y=6$，将 $y=6-x$ 代入函数 $f(x,y)$ 中得

$$f(x,y)=2x^3-12x^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 6。$$

于是 $f'_x(x,y)=6x^2-24x$，令 $f'_x(x,y)=6x^2-24x=0$，解得 $x=0,x=4$，所以 $f(x,y)$ 在线段 AB 上最大值是0，最小值是 -64。

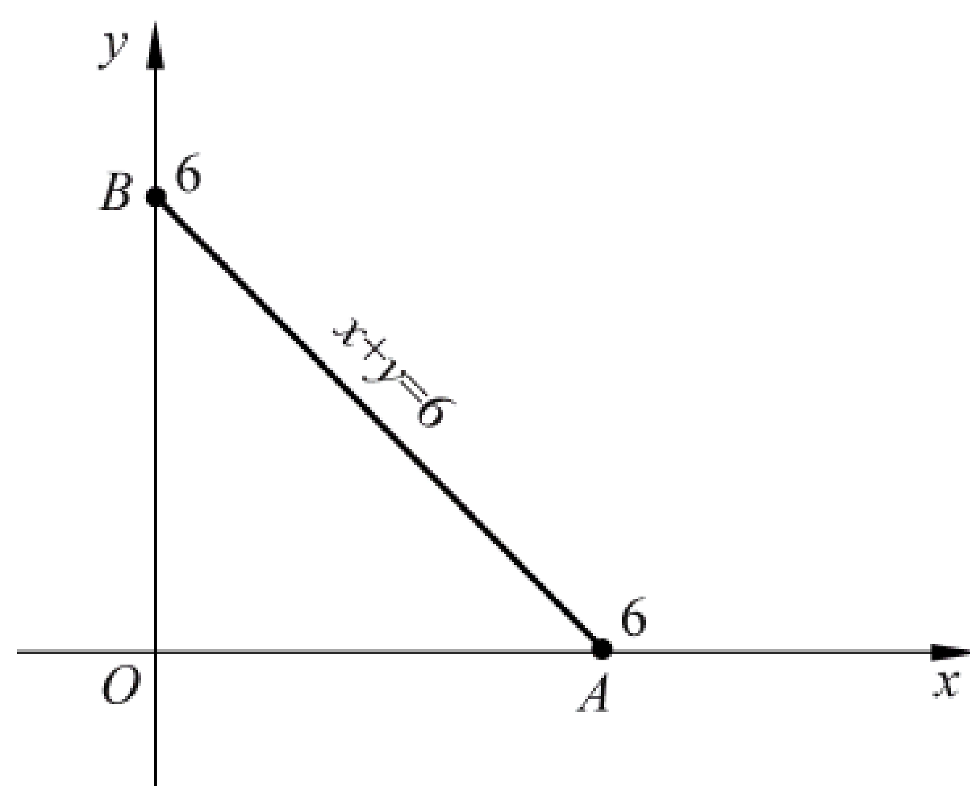


图 8-1

比较区域内部驻点函数值与边界的最值，显然 $f(x,y)$ 在三角形的闭区域上的最大值是4，最小值是 -64。

例 8.23 求函数 $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2$ 在闭区域 $4x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值和最小值。

解 求函数 $f(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=2x+12y=0,\\ f'_y(x,y)=12x+4y=0。\end{cases}$$

解方程组，得到稳定点 $(0,0)$，其函数值为 $f(0,0)=0$。

接下来，求函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 的边界 $4x^2+y^2=25$ 上的最值。

引入拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25),$$

求 $L(x,y,\lambda)$ 关于 x,y,λ 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases}L'_x=2x+12y+8\lambda x=0,\\ L'_y=12x+4y+2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=4x^2+y^2-25=0。\end{cases}$$

由前两个方程得到 $24x^2+7xy-6y^2=0$，于是有 $3x+2y=0$ 或 $8x-3y=0$，方程组有4组解，分别是 $(2,-3)$，$(-2,3)$，$\left(\frac{3}{2},4\right)$ 和 $\left(-\frac{3}{2},-4\right)$，其函数值分别是

$$f(-2,3)=f(2,-3)=-50,\quad f\left(\frac{3}{2},4\right)=f\left(-\frac{3}{2},-4\right)=106\frac{1}{4}。$$

比较 $f(x,y)$ 的稳定点函数值及边界最值，函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $4x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值是 $106\frac{1}{4}$，最小值是 -50。

求二元函数在闭区域 D 的边界最值方法综述

(1) 确定闭区域 D 的边界曲线，计算函数在每段曲线上的最值；

(2) 求函数在每段曲线上的最值，有两个方法：一是利用曲线段方程，将二元函数转化为一元函数，从而求出此一元函数的最大值和最小值；二是将这段曲线方程看作二元函数应满足的条件，求此二元函数在此条件下的最值。

练习题 8-2

1. 求下列函数的条件极值：

(1) $f(x,y)=xy$,约束条件为 $x+y=1$；

(2) $f(x,y,z)=x-2y+2z$,约束条件为 $x^2+y^2+z^2=1$。

2. 求下列函数的驻点和极值点和极值：

(1) $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$；　　(2) $f(x,y)=xy(3-x-y)$。

3. 证明：函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 无极值点。

4. 求 $f(x,y)=4x+xy^2+y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值。

5. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x+y+2=0$ 间的最短距离。

6. 求原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 上的最短距离。

7. 求表面积一定而体积最大的长方体。

8. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值,其中 $x,y,z>0$。

9. 求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在圆 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1\end{cases}$ 上的最大值和最小值。

10. 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ $(x,y,z>0)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值。依此证明：当 a,b,c 为正实数时,有 $ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$。

11. 证明：对任意的正数 a,b,c,有 $abc^3\leqslant\dfrac{27}{5^5}(a+b+c)^5$。

12. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在圆域 $x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值和最小值。

* 8.3　偏导数在几何上的应用

题型 12　求空间曲线的切线方程和法平面方程

定理 7　(1) 若曲线以参数方程形式给出：$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$,则过曲线上的点 $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$,切线的方向向量和法平面的法向量为 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$,于是

切线方程为：$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$；

法平面方程为：$x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0$。

(2) **若曲线以两个相交曲面形式给出：**$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0。\end{cases}$过曲线上点 $M(x_0,y_0,z_0)$,切线的方向向量和法平面的法向量为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} \quad 或 \quad \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}。$$

于是

法平面方程为：$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$；

切线方程为：$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$。

例 8.24 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点(1,1,1)处的切线方程与法平面方程。

解 因为 $x'=1,y'=2t,z'=3t^2$，点(1,1,1)对应的参数 $t=1$，所以曲线在点(1,1,1)处的切向量为 $\boldsymbol{t}=(1,2,3)$。于是，过曲线上的点(1,1,1)的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};$$

法平面方程为 $(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$，即 $x+2y+3z-6=0$。

例 8.25 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点(1,−2,1)处的切线方程及法平面方程。

解 设曲线在点(1,−2,1)的切向量为 $\boldsymbol{t}$，则

$$\boldsymbol{t}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2x&2y&2z\\1&1&1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=-6(1,0-1)。$$

于是，曲线在点(1,−2,1)处的切向量为(1,0,−1)。因此曲线在点(1,−2,1)处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0,\quad 即\quad x-z=0。$$

例 8.26 求曲线 $y^2=2x,z^2=2x-3$ 在点 $M(2,2,-1)$ 处的切线方程和法平面方程。

解 该曲线可以看成是以参数方程形式给出，即

$$x=x,\quad y^2=2x,\quad z^2=2x-3。$$

于是，曲线在点 $M(2,2,-1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{n}=(x'(x),y'(x),z'(x))\big|_{(2,2,-1)}=\left.\left(1,\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)\right|_{(2,2,-1)}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}(2,1,-2)。$$

因此，过曲线上的点 $M(2,2,-1)$ 的切线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2};$$

法平面方程为 $2(x-2)+(y-2)-2(z+1)=0$。

另外，我们还可以把该曲线看作是两个相交曲面。令

$$F(x,y,z)=y^2-2x,\quad G(x,y,z)=z^2-2x+3,$$

则曲线在点 $M(2,2,-1)$ 的切向量为

$$\boldsymbol{t}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}\right|_{(2,2,-1)}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&2y&0\\-2&0&2z\end{vmatrix}\right|_{(2,2,-1)}=(-8,-4,8)=-4(2,1-2)。$$

同样可以得到过曲线上的点 $M(2,2,-1)$ 的切线方程与法平面方程。

题型 13 求曲面的切平面方程和法线方程

定理 8 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，则过曲面上的点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面的法向量或法线的方向向量是 $(F'_x(x_0y_0z_0),F'_y(x_0y_0z_0),F'_z(x_0y_0z_0))=(F'_x,F'_y,F'_z)$，于是

切平面方程为： $F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$；

法线方程为： $\dfrac{x-x_0}{F'_x}+\dfrac{y-y_0}{F'_y}=\dfrac{z-z_0}{F'_z}$。

例 8.27 求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切平面方程及法线方程。

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，则曲面在点 $(1,2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{(1,2,1)}=(2x,2y,2z)\Big|_{(1,2,1)}=2(1,2,1)。$$

于是曲面在点 $(1,2,1)$ 的切平面方程为

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+1\cdot(z-1)=0,\quad 即\quad x+2y+z-6=0。$$

曲面在点 $(1,2,1)$ 的法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}。$$

练习题 8-3

1. 求螺旋线 $x=\cos t,y=\sin t,z=t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点的切线方程和法平面方程。

2. 求曲线 $y=x,z=x^2$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

3. 求与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切且与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程。

4. 证明：在曲面 $z=x^2+y^2$ 上的任意点的法线都与 z 轴相交。

5. 证明：曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上的任何点的切平面在三坐标轴上的截距之和等于 a。

6. 求曲线 $x^2+y^2=10$ 和 $y^2+z^2=10$ 在点 $(1,1,3)$ 的切线方程和法平面方程。

7. 证明：曲面 $3x^2+2y^2-2z-1=0$ 和 $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ 在点 $(1,1,2)$ 直交（二曲面在点 $(1,1,2)$ 的切平面垂直）。

8.4 多元函数连续、偏导数与全微分及其应用考研真题

一、多元函数微分学考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于多元函数微分学的考研数一真题共出了 31 道题，是考研真题较多的一章，题型分布在：

1. 计算抽象函数的偏导数：共计 7 个题，分布在 2005 年，2007 年，2010 年，2011 年，2014 年，2017 年和 2018 年。

2. 求具体函数的偏导数：有 1 个题，分布在 2011 年。

3. 求全微分：共计 2 个题，分布在 2015 年和 2016 年。

4. 极值点与极值：共计 7 个题，分布在 2003 年，2004 年，2006 年，2009 年，2011 年，2012 年和 2013 年。

5. 最值与条件最值：共计 3 个题，分布在 2007 年，2008 年和 2019 年。

6. 二元函数性质：有 1 个题，分布在 2012 年。

7. 求切线、法线、切平面、法平面方程：共计 4 个题，分布在 2003 年，2013 年，2014 年和 2018 年。

8. 求梯度与方向导数：共计 6 个题，分布在 2005 年，2008 年，2012 年，2015 年，2017 年和 2019 年。

1　多元函数微分学考研数一真题题型分析

1. 计算抽象函数的偏导数：2005 年和 2007 年分别考了抽象函数的二阶偏导数和一阶偏导数；2010 年考了由方程确定的抽象隐函数的一阶偏导数；2011 年考了抽象函数在一点的二阶混合偏导数；2014 年考了抽象函数的二阶偏导数，确定微分方程，解方程；2017 年考了二元抽象函数在一点的一阶和二阶导数；2019 年考了二元抽象函数的一阶偏导数。

2. 求具体函数的偏导数：2011 年考了用变限积分函数表示的函数在一点的二阶偏导数。

3. 求全微分：2015 年和 2016 年考了求二元隐函数在一点的全微分。

4. 极值点与极值：2003 年考了定义方法判断一点是否是极值点；2011 年考了二元函数一点成为极值点的充分条件；2004 年考了由方程确定的二元隐函数的极值点与极值；2009 年，2012 年和 2013 年考了计算二元函数的极值；2006 年考了极值点的性质。

5. 最值与条件最值：2007 年考了二元函数在闭区域的最值；2008 年和 2018 年考了条件最值。

6. 二元函数的性质：2012 年考了极限与可微关系。

7. 求切线、法线、切平面、法平面方程：2003 年考了求平行某平面的切平面方程；2013 年，2014 年和 2018 年考了曲面上一点的切平面方程。

8. 求梯度与方向导数：2005 年和 2017 年考了求方向导数；2008 年和 2012 年考了求梯度；2015 年和 2019 年考了求最大的方向导数。

2　多元函数微分学考研数一真题

1. (2003，一(2)(4 分))求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程。

考点与解法：求切平面方程。求曲面的法向量，确定切点，从而确定法向量。

2. (2003，二(3)(4 分))已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

则

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$的极值点；　　(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$的极大值点；

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$的极小值点；

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0) 是否为 $f(x,y)$ 的极值点。

考点与解法：利用定义判断极值点。确定 $f(0,0)=0$，利用极限与无穷小关系，将 $f(x,y)$ 表示为“具体”函数，$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)^2\alpha(x,y)$。

3. (2004,三(19)(12 分))设 $z=z(x,y)$是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$的极值点和极值。

考点与解法:求二元函数的极值点和极值。求稳定点,计算二阶偏导数,用 $\Delta=B^2-AC$ 判断稳定点是不是极值点,是极大值点还是极小值点。

4. (2005,一(3)(4 分))设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,求$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}$。

考点与解法:求方向导数。求方向向量的方向余弦,求偏导数,根据方向导数公式。

5. (2005,二(9)(4 分))设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

考点与解法:求二阶偏导数。求出二阶偏导数,确定哪两个相等。

6. (2006,二(10)(4 分))设 $f(x,y)$与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y'(x,y)\neq0$。已知点 (x_0,y_0) 是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq0$;

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq0$。

考点与解法:极值点性质。利用点 (x_0,y_0) 是函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,则$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$,即 $f_x'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\cdot\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0$。

7. (2007,二(12)(4 分))设 $f(u,v)$是二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

考点与解法:求二元抽象复合函数的偏导数。利用链式求导法则。

8. (2007,三(17)(11 分))求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4,y\geqslant0\}$上的最大值和最小值。

考点与解法:求二元函数的最值。求稳定点及其函数值,求边界最值,比较大小。

9. (2008,一(2)(4 分))函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于

(A) $\boldsymbol{i}$; (B) $-\boldsymbol{i}$; (C) $\boldsymbol{j}$; (D) $-\boldsymbol{j}$。

考点与解法:求梯度。求偏导数,确定梯度。

10. (2008,三(17)(11 分))已知曲线 C:$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点。

考点与解法:求条件最值。曲线上的点(x,y,z)到 xOy 面距离为 $|z|$,目标函数可确定为 $f(x,y,z)=z^2$。

11. (2009,三(15)(9 分))求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

考点与解法:求二元函数的极值。求稳定点,利用判别式 $\Delta=B^2-AC$ 判断稳定点是不

是极值点，是极大值点还是极小值点，并求极值。

12. (2010，一(2)(4 分))设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 是可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$

(A) x； (B) z； (C) $-x$； (D) $-z$。

考点与解法：求抽象的复合函数的偏导数。利用公式，或方程两边求偏导，或微分。

13. (2011，一(3)(4 分))设函数 $f(x)$具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0) 处取得极小值的一个充分条件是：

(A) $f(0)>1,f''(0)>0$； (B) $f(0)>1,f''(0)<0$；

(C) $f(0)<1,f''(0)>0$； (D) $f(0)<1,f''(0)<0$。

考点与解法：取得极值的充分条件。确定判别式 $\Delta=B^2-AC>0$ 应满足的条件。

14. (2011，二(11)(4 分))设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，求$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}$。

考点与解法：计算二阶偏导数。求变限积分函数的一阶偏导数，再求二阶偏导数。

15. (2011，一(3)(4 分))设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$可导，且在 $x=1$ 取得极值$g(1)=1$，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

考点与解法：计算抽象的复合函数的二阶偏导数。用链式求导法则，求出二阶偏导数。

16. (2012，一(3)(4 分))如果函数 $f(x,y)$在(0,0) 处连续，下列命题正确的是：

(A) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则 $f(x,y)$在(0,0)处可微；

(B) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0,0) 处可微；

(C) 若 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在；

(D) 若 $f(x,y)$ 在(0,0) 处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在。

考点与解法：可微的定义和性质。反例可以确定(A)，(C)，(D)是错误的。

17. (2012，二(11)(4 分))求 $\left.\mathrm{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}$。

考点与解法：计算三元函数的梯度。求函数 $xy+\frac{z}{y}$在点(2,1,1) 的偏导数。

18. (2012，三(16)(10 分))求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

考点与解法：二元函数的极值。求稳定点。二阶偏导，利用判别式 $\Delta=B^2-AC$ 确定稳定点是否是极值点，从而得到极值。

19. (2013，一(2)(4 分))曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点(0,1,−1)处的切平面方程为

(A) $x-y+z=-2$； (B) $x+y+z=0$；

(C) $x-2y+z=-3$； (D) $x-y-z=0$。

考点与解法：求切平面方程。求曲面在点(0,1,−1)处的法向量，得到切平面方程。

20.（2013，三(17)(10分)）求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^2}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值。

考点与解法：二元函数的极值。求稳定点，二阶偏导数，利用判别式 $\Delta=B^2-AC$ 确定稳定点是否是极值点，从而得到极值。

21.（2014，二(9)(4分)）求曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点(1,0,1)处的切平面方程。

考点与解法：求切平面方程。求曲面在点(1,0,1)处的法向量，得到切平面方程。

22.（2014，三(17)(10分)）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

考点与解法：求二阶偏导和解方程。求函数的二阶偏导数，确定方程，解方程。

23.（2015，二(11)(4分)）求函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+\cos x=2$ 确定，求 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}$。

考点与解法：求二元隐函数在一点的全微分。利用全微分公式，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$ 或对等式两端求微分。

24.（2015，三(17)(10分)）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 的最大方向导数。

考点与解法：最大方向导数和条件极值。求出函数 $f(x,y)$ 的最大方向导数(梯度的摸)，以此作为目标函数，求满足条件 $x^2+y^2+xy=3$ 的最值。

25.（2016，二(11)(4分)）设 $f(x,y)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程

$$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$$

确定，求 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}$。

考点与解法：求二元隐函数在一点的全微分。利用全微分公式，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$，或利用全微分形式不变性，对方程两边求微分。

26.（2017，一(3)(4分)）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点(1,2,0)处沿向量 $\boldsymbol{u}=(1,2,2)$ 的方向导数。

(A) 12；　　(B) 6；　　(C) 4；　　(D) 2。

考点与解法：求三元函数的方向导数。求函数 $f(x,y,z)$ 在点(1,2,0)的偏导数，由方向向量确定方向余弦，从而得到方向导数。

27.（2017，三(15)(4分)）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$。

考点与解法：求二元抽象复合函数的一阶导数和二阶导数。利用链式法则，求函数的一阶导数和二阶导数，再求 $x=0$ 时的导函数值。

28.（2018，一(2)(4分)）过点(1,0,0)和点(0,1,0)且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程：

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$；　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$；

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$；　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$。

考点与解法：求曲面的切平面方程。显然 $z=0$ 是曲面的切平面，曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为$(2x,2y,-1)$，若 $x+y-z=1$ 是切平面，则切平面的法向量为$(1,1,-1)$，得到 $x=y=\frac{1}{2}$，代入切面方程和曲面方程，z 不等。

29. (2018，三(16)(10分))将长为 $2m$ 的铁丝分成三段，依次围成圆，正方形，三角形。三个图形的面积之和是否存在最小值，求出最小值。

考点与解法：求条件极值。设曲线被分成三段，圆的半径为 x，正方形的边长为 y，三角形的边长为 z，则三个图形的面积和 $S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$，自变量 x,y,z 满足条件：$2\pi x+4y+3z=2$，求其条件最值。

30. (2019，二(9)(4分))设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，计算

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

考点与解法：求二元抽象的复合函数的偏导数。利用求偏导法则和求导公式，求出偏导数，代入即可。

31. (2019，三(16)(10分))设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点$(3,4)$的方向导数中，$l=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 方向导数最大，最大值为10。求：

(i) a,b 的值；

(ii) 曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$的面积。

考点与解法：求二元函数方向导数，利用条件确定未知常数；求曲面的面积。求二元函数方向导数，当第一类曲面积分被积函数是1时，其积分值就是积分曲面的面积，再将曲面积分转化为二重积分，或利用计算曲面的面积公式。

二、多元函数微分学考研数三真题分布、考点和解法

从2003—2019年的17年里，关于多元函数微分学的考研数三真题共出了24道题，是考研真题较多的一章，题型分布在：

1. 计算抽象函数的偏导数：共有7个题，分布在2003年，2005年，2007年，2008年，2011年，2014年和2019年。

2. 求具体函数的偏导数：共有4个题，分布在2004年，2008年，2009年和2016年。

3. 求全微分：共有7个题，分布在2005年，2008年，2011年，2012年，2013年，2015年和2016年。

4. 极值点与极值：共有3个题，分布在2003年，2006年和2009年。

5. 计算函数最值与条件最值：共有2个题，分布在2010年和2018年。

6. 求二元函数的表达式：有1个题，分布在2017年。

2.1 多元函数微分学考研数三真题题型分析

1. 计算抽象函数的偏导数：2003年和2005年考了计算抽象函数的二阶偏导数，两题类似；2007年考了抽象函数的一阶偏导数；2008年考了由方程确定的抽象二元函数的偏导

数;2011 年考了抽象函数在一点的二阶偏导数;2014 年考了抽象函数的一阶偏导数所满足的方程;2019 年考了计算二元抽象函数的二阶偏导数。

2. 计算具体函数的偏导数：2004 年考了确定二元具体函数，求二阶偏导数;2008 年和 2009 年考了求具体函数在一点的偏导数;2016 年考了验证偏导函数满足某个方程。

3. 求全微分：2005 年考了二元函数在一点的全微分;2008 年考了抽象函数的全微分;2011 年考了求幂指函数在一点的全微分;2012 年考了抽象函数在一点的全微分;2013 年和 2015 年考了由方程确定的二元函数在一点的全微分;2016 年考了由方程确定的二元抽象函数在一点的全微分。

4. 极值与极值点：2003 年考了极值点的性质;2006 年考了条件极值的性质；2009 年考了求二元函数的极值。

5. 求最值与条件最值：2010 年和 2018 年考了条件最值。

6. 求二元函数的表达式：2017 年考了求全微分的原函数。

2.2 多元函数微分学考研数三真题

1. (2003,二(2)(4 分))设可微函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$在 $y=y_0$处的导数等于零； (B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$处的导数大于零；
(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$处的导数小于零； (D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$处的导数不存在。

考点与解法：极值点的性质。可微，偏导存在，极小值点，偏导等于零。

2. (2003,四(8 分))设 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

考点与解法：求抽象函数的二阶偏导数。利用链式法则求抽象函数的二阶偏导数。

3. (2004,一(2)(4 分))设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(x)\neq 0$，求$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$。

考点与解法：求二阶混合偏导数。利用等式，求出二元函数 $f(u,v)$ 的表达式，再求二阶混合偏导数。

4. (2005,一(3)(4 分))设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，求 $\left.dz\right|_{(1,0)}$。

考点与解法：求二元函数在一点的全微分。求二元函数在点(1,0)的偏导数。

5. (2005,三(16)(8 分))设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

考点与解法：求抽象函数的二阶偏导数。求复合函数的二阶偏导数，代入，化简。

6. (2006,二(11)(4 分))题目同上小节 6.(2006,二(10)(4 分))题。

7. (2007,二(13)(4 分))设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$。

考点与解法：求抽象函数的一阶偏导数。利用链式法则求复合函数的一阶偏导数。

8. (2008,一(3)(4分))已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则

(A) $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都存在; (B) $f'_x(0,0)$ 不存在,$f'_y(0,0)$ 存在;

(C) $f'_x(0,0)$ 存在,$f'_y(0,0)$ 不存在; (D) $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都不存在。

考点与解法:求一点的偏导数。根据偏导数的定义,求 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$。

9. (2008,三(16)(10分))设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且 $\varphi'\neq-1$。

(i) 求 dz;(ii) 记 $u=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$。

考点与解法:求隐函数的全微分,求一阶偏导数。(i)对方程两边求微分,或根据全微分公式求全微分。(ii)求 u,再求一阶偏导数。

10. (2009,二(10)(4分))设 $z=(x+e^y)^x$,求$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$。

考点与解法:求幂指函数在一点的偏导数。恒等变换,将幂指函数转化为指数函数。

11. (2009,三(15)(9分))求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

考点与解法:求二元函数的极值。求稳定点,利用判别式 $\Delta=B^2-AC$ 判断稳定点是不是极值点,是极大值点还是极小值点,并求极值。

12. (2010,三(17)(10分))求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

考点与解法:求条件最值。应用拉格朗日乘数法。

13. (2011,二(10)(4分))设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,求 $\left.dz\right|_{(1,1)}$。

考点与解法:求幂指函数在一点的全微分。将幂指函数转化为指数函数,求全微分。

14. (2011,三(16)(10分))已知函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数,$f(1,1)=2$ 是 $z=f(x+y,f(x,y))$的极值,求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$。

考点与解法:求抽象函数在一点的二阶偏导数。应用链式法则,求出二阶混合偏导。

15. (2012,二(11)(4分))设连续函数 $z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,求$\left.dz\right|_{(1,1)}$。

考点与解法:求全微分。利用全微分公式,根据极限,将抽象的函数表示为具体函数,根据偏导数定义,得到 $f'_x(0,0)$和 $f'_y(0,0)$。

16. (2013,二(10)(4分))设函数 $z=z(x,y)$由方程$(z+y)^x=xy$ 确定,求$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$。

考点与解法:求一点的偏导数。求偏导函数,再求$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$。

17. (2014,三(17)(10分))设函数 $f(u)$具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x。$$

若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式。

考点与解法：求偏导数和解方程。求函数的偏导数，确定方程，解方程。

18.（2015，二(11)(4分)）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，求 $dz\big|_{(0,0)}$。

考点与解法：求二元隐函数在一点的全微分。公式法，求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}$，或对方程两边求微分。

19.（2016，一(2)(4分)）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

(A) $f'_x-f'_y=0$；　(B) $f'_x+f'_y=0$；　(C) $f'_x-f'_y=f$；　(D) $f'_x+f'_y=f$。

考点与解法：求偏导函数所满足方程。求出 f'_x 和 f'_y，计算 $f'_x\pm f'_y$。

20.（2016，二(11)(4分)）设 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程

$$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$$

确定，求 $dz\big|_{(0,1)}$。

考点与解法：求二元隐函数在一点的全微分。利用全微分公式，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}$。

21.（2017，一(2)(4分)）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是：

(A) $(0,0)$；　(B) $(0,3)$；　(C) $(3,0)$；　(D) $(1,1)$。

考点与解法：求二元隐函数的极值点。求二元函数的稳定点，再求二阶导数，用判别式判断哪个稳定点是极值点。

22.（2017，二(12)(4分)）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，且已知 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$。

考点与解法：求原函数。利用分组凑微分方法求原函数。

23.（2018，三(17)(10分)）题目同上小节29.（2018，三(16)(10分)）题。

24.（2019，三(16)(10分)）已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且

$$f(x,y)=xy-f(x+y,x-y),$$

求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

考点与解法：求抽象复合函数的二阶偏导数。利用链式求导法则，求出二阶偏导和二阶混合偏导，利用 $f''_{12}=f''_{21}$ 化简。

8.5 本章练习题答案与提示

练习题 8-1 答案与提示

1. (1) -2。提示：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{2-e^y}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{1+(1-e^y)}-1}=2\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{xy}{1-e^y}$

$$=2\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy}{-y}=-2。$$

(2) 0。提示：令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $r\to 0$，θ 任意，于是有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0}2(\cos\theta+\sin\theta)r\ln r=0。$$

(3) 0。提示：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 $r\to 0$，θ 任意，于是有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\sin\theta\cos^2\theta=0。$$

(4) $-\frac{1}{4}$。提示：有理化 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy+x^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{-xy}{x(y+x)(2+\sqrt{xy+4})}=-\frac{1}{4}$。

2. (1) 提示：沿 $x=y$ 路径趋于原点，极限不存在。

(2) 提示：沿 $x=y$ 和 $x=0$ 的路径趋于原点，有不同的极限。

(3) 提示：沿 $x=y$ 和 $x=2y$ 的路径趋于原点，有不同的极限。

(4) 提示：沿 $y=x^2$ 和 $y=2x^2$ 路径趋于原点，有不同的极限。

3. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy$。 (2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2y}{(x-y)^2}$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{(x-y)^2}$。

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos xy-\sin(x-y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos xy+\sin(x-y)$。

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\arctan xy}\frac{y}{1+(xy)^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\arctan xy}\frac{x}{1+(xy)^2}$。

4. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$。

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2xy^3}{[1+(xy)^2]^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-x^2y^2}{[1+(xy)^2]^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2yx^3}{[1+(xy)^2]^2}$。

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x(\ln y)^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}+y^x(\ln y)^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2y^x$。

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y)^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{(x+y)^2}$。

5. $\frac{\pi}{4}$。提示：切线与 x 轴的夹角的正切值等于 $z'_x(2,4)$。

6. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+y(f''_{21}+yf''_{22})$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+yf''_{22}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''_{22}$。

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}+\frac{y-x}{y^2}f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{y^2}f'_2$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{11}+\frac{2x}{y^3}f'_2-2\frac{x}{y^2}f''_{12}+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}$。

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f''_{11}+2yf''_{12}+2yf''_{13}+f''_{22}+2f''_{23}+f''_{33}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+xyf''_{11}+(x+y)f''_{12}+(x-y)f''_{13}+f''_{22}-f''_{33}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''_{11}+2xf''_{12}-2xf''_{13}+f''_{22}-2f''_{23}+f''_{33}$。

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f''$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf''$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+4y^2f''$。

7. (1) $\mathrm{d}z=\frac{z-yz+\frac{1}{x}}{x-xy+\frac{1}{z}}\mathrm{d}x+\frac{-xz+\frac{1}{y}}{x-xy+\frac{1}{z}}\mathrm{d}y$。提示：【方法1】利用全微分形式不变性，对方程两边求微分，求出 $\mathrm{d}z$ 与 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的关系，从而得到全微分；【方法2】利用求隐函数的偏导方法，求出 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，根据 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$，得到全微分。

(2) 由于$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'_1,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}f'_1+\frac{1}{z}f'_2,\frac{\partial u}{\partial}=-\frac{1}{z^2}f'_2$,所以

$$du=-\frac{y}{x^2}f'_1dx+\left(\frac{1}{x}f'_1+\frac{1}{z}f'_2\right)dy-\frac{1}{z^2}f'_2dz。$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x}f'_1+\frac{1}{z}f'_2\right)=-\frac{1}{xz^2}f''_{12}-\frac{1}{z^3}f''_{22}。$$

(3) $dz=\frac{e^{-xy}}{e^z-2}(ydx+xdy)$;$z''_{xx}=-\frac{y^2e^{-xy}}{(e^z-2)^3}[(e^z-2)^2+e^{z-xy}]$。

8. $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{2})$。提示:$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(5,1,2)}=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial u}{\partial z}$。

9. $\frac{98}{13}$。提示:$\boldsymbol{l}=(4,3,12)=13\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$,则 $\cos\alpha=\frac{4}{13},\cos\beta=\frac{3}{13},\cos\gamma=\frac{12}{13}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(5,1,2)}=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial u}{\partial z}。$$

10. $x_0+y_0+z_0$。提示:球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点(x_0,y_0,z_0)处,沿球面在该点的外法线方向为 $\boldsymbol{t}=2(x_0,y_0,z_0)$,由于 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$,则单位向量为 $\boldsymbol{t}_e=(x_0,y_0,z_0)$,即 $\cos\alpha=x_0,\cos\beta=y_0,\cos\gamma=z_0$。

11. (1) $\text{grad}u(1,0,1)=(1,2,1)$;(2) $\text{grad}u(0,0,0)=(1,1,1)$。

12. $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$;3。

13. $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,$\frac{\pi}{4}$,$\frac{5\pi}{4}$,$\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$。

14. 提示:证明函数在点(0,0)的极限不存在。或沿 $x=y$ 路径趋于原点的极限不等于这点的函数值。

15. 当 $x\neq y$ 时,连续,当 $x=y\neq 0$ 时,可去间断点,$x=y=0$ 为无穷间断点。

16. 提示:沿任何射线趋于原点极限是0,即对任何固定方向θ,有

$$\lim_{t\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}t\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\lim_{t\to 0}t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=0;$$

沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点的极限是 $\frac{1}{2}$。

17. 提示:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0}r(\sin^3\theta-\cos^3\theta)=0=f(0,0)$;

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x^3}=1;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^3}{\Delta y^3}=-1;$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-\Delta x+\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x-\Delta y)\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

显然此极限沿 $\Delta x=-\Delta y$ 的极限不为零。

18. 当 $\varphi(0,0)=0$ 时,函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的偏导存在,在点(0,0)可微。提示:由于 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(\Delta x,0)$,而 $\varphi(x,y)$在点(0,0)的邻域内连续,所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x,0)=\varphi(0,0)$,因此要使偏导存在,必须且只需 $\varphi(0,0)=0$。在此条件下,证明 $f'_y(0,0)$存在,并且 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微。

19. 提示:首先求偏导函数,当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,$f'_x(x,y)=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$,$f'_y(x,y)=\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$,当 $x^2+y^2=0$ 时,$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$,并且 $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$,令 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,则 $r\to 0$,θ任意,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_y(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\lim\limits_{r\to 0}2r\sin^4\theta\cos\theta=0=f'_x(0,0)$,同样 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_y(x,y)=$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}=\lim\limits_{r\to 0}2r\cos^4\theta\sin\theta=0=f'_y(0,0)$，于是偏导函数连续。

20. 提示：方程 $x-az=\varphi(y-bz)$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，于是对 $x-az=\varphi(y-bz)$ 关于 x 求偏导，y 是常量，z 是 x 的函数，于是有 $1-az'_x=\varphi'(-bz'_x)$，解得 $z'_x=\dfrac{1}{a-b\varphi'}$，同样对 y 求偏导，得到 $-az'_y=\varphi'(1-bz'_y)=\varphi'-b\varphi' z'_y$，解得 $z'_y=-\dfrac{\varphi'}{a-b\varphi'}$。

21. 提示：对 x 求偏导 $G'_1(c-az'_x)+G'_2(-bz'_x)=0$，解得 $z'_x=\dfrac{cG'_1}{aG'_1+bG'_2}$，对 y 求偏导，$G'_1(-az'_y)+G'_2(c-bz'_y)=0$，解得 $z'_y=\dfrac{cG'_2}{aG'_1+bG'_2}$，所以 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$。

22. 提示：对 x 求偏导，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+2yf'_2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xf'_1+2yf'_2)\ =2f'_1+2x(2xf''_{11}+2yf''_{12})+2y(2xf''_{21}+2yf''_{22})=2f'_1+4x^2f''_{11}+8xyf''_{12}+4y^2f''_{22}$。同样对 y 求偏导 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+2xf'_2$，并且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(-2yf'_1+2xf'_2)=-2f'_1-2y(-2yf''_{11}+2xf''_{12})+2x(-2yf''_{21}+2xf''_{22})=-2f'_1+4y^2f''_{11}-8xyf''_{12}+4x^2f''_{22}$，求和，于是有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4$。

23. $u'_x=\dfrac{1-12v}{1-8uv}$；$v'_x=\dfrac{2u-3}{1-8uv}$；$u'_y=\dfrac{1-4v}{8uv-1}$；$v'_y=\dfrac{2-4v}{8uv-1}$。

24. 提示：显然 y,t 是中间变量，x,z 是自变量，根据链式法则得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot g'_1+f'_2\cdot g'_2\cdot\varphi'_x;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=f'_z+f'_2\cdot g'_2\cdot\varphi'_z。$$

练习题 8-2 答案与提示

1. (1) $f_{\max}=\dfrac{1}{4}$；(2) $f_{\max}=3$，$f_{\min}=-3$。提示：(1)令 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-1)$，则 $L'_x=y+\lambda=0$，$L'_y=x+\lambda=0$，$x+y-1=0$，解得 $x=y=\dfrac{1}{2}$，根据实际问题，仅有最大值，所以 $f_{\max}=f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。(2)令 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，则 $L'_x=1+2\lambda x=0$，$L'_y=-2+2\lambda y=0$，$L'_z=2+2\lambda z=0$，$x^2+y^2+z^2-1=0$，解得 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，于是 $f_{\max}=3$，$f_{\min}=-3$。

2. (1) 驻点为$(3,-1)$；$(3,-1)$ 是极小值点，极小值是 $f(3,-1)=-8$。

(2) 驻点：$(0,0)$，$(0,3)$，$(3,0)$，$(1,1)$；$(1,1)$是极大值点，极大值为 1。

3. 提示：唯一驻点$(0,0)$，由于 $f(x,y)=x^2-y^2$，于是在$(0,0)$任何小的邻域上，都含有 $x>y>0$ 点，这些点的函数值大于零；也含有 $0<x<y$ 点，这些点的函数值小于零，所以$(0,0)$不是极值点。

4. $f_{\max}=4$，$f_{\min}=-4$。提示：函数 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的内部没有驻点，所以最值只能在边界上达到。在边界 $x^2+y^2=1$ 上，$f(x,y)=4x+xy^2+y^2=1+5x-x^2-x^3$，$x\in[-1,1]$，$f'=5-2x-3x^2=(5+3x)(1-x)$，驻点 $x=1$，$x=-\dfrac{5}{3}$。于是

$$f_{\max}=\max\left\{f(-1),f(1),f\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}=4,\quad f_{\min}=\max\left\{f(-1),f(1),f\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}=-4。$$

5. $\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$。提示：设 (x,y) 是抛物线 $y=x^2$ 上的点，则 (x,y) 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|x+y+2|$，目标函数设为 $f(x,y)=(x+y+2)^2$，拉格朗日函数为 $L(x,y,\lambda)=(x+y+2)^2+\lambda(x^2-y)$，

则有 $L'_x=2(x+y+2)+2\lambda x=0$，$L'_y=2(x+y+2)-\lambda=0$，$y=x^2$，解得 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$。所以 $d_{\min}=\frac{7}{4\sqrt{2}}$。

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$。提示：设 (x,y,z) 是曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 点，到原点距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，目标函数 $f(x,y)=x^2+y^2+z^2$，取拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1],$$

令 $L'_x=2x+2\lambda(x-y)=0$，$L'_y=2y-2\lambda(x-y)=0$，$L'_z=2z-2\lambda z=0$，解得 $z=0$，$x+y=0$，即 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，所以 $d_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

7. 正方体。提示：设长方体的各边长分别为 x,y,z，则体积 $V(x,y,z)=xyz$，表面积为 $S=2(xy+yz+zx)$，S 为常量。拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2(xy+yz+zx)-S),$$

求驻点，解得 $x=y=z$。

8. 当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，取最大值，最大值为 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$。

9. $f_{\max}=1+\sqrt{2}$；$f_{\min}=1-\sqrt{2}$。提示：函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在圆 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1\end{cases}$ 上的最大值和最小值等价于函数 $f(x,y,z)=x+y+1$ 在圆上 $x^2+y^2=1$ 的最值，还等价于函数 $f(x,y,z)=x+1+\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最值，而 $f'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$，令其等于零，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。于是 $f_{\max}=\max\left\{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1),f(-1)\right\}=1+\sqrt{2}$；$f_{\min}=\min\left\{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1),f(-1)\right\}=1-\sqrt{2}$。此题也可用条件极值求函数的最值。

10. 提示：令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$，求偏导并令等于零，$L'_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0$，$L'_y=\frac{2}{y}+2\lambda y=0$，$L'_z=\frac{3}{z}+2\lambda z=0$，$x^2+y^2+z^2-6r^2=0$，解得唯一驻点，$x=r,y=\sqrt{2}r,z=\sqrt{3}r$，于是 $f_{\max}=f(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=\ln 6\sqrt{3}r^6$，有不等式 $\ln x+2\ln y+3\ln z\leqslant\ln 6\sqrt{3}r^6=\ln 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3$，取 $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b},z=\sqrt{c}$，则得到所要证明的不等式。

11. 提示：利用条件极值证明。令 $a+b+c=r$，于是只需计算三元函数 $f(a,b,c)=abc^3$ 在条件 $a+b+c=r$ 下的条件最值为 $\frac{27}{5^5}r^5$。具体过程和 10 题类似。

12. $f_{\min}(3,-4)=-75$，$f_{\max}(-3,4)=125$。提示：首先求区域内部的驻点，再求函数在边界上的最值，比较边界上的最值、驻点的值，最大者就是最大值；最小者就是最小值。

练习题 8-3 答案与提示

1. 切线方程：$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{1}$，法平面方程：$z-x=\frac{\pi}{2}$。

2. 切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$，法平面方程：$x+y+2z-4=0$。

3. 切平面方程：$2x+4y-z=5$。

4. 提示：证明任意点的法线与 z 轴共面，且不平行。

5. 提示：设 (x_0,y_0,z_0) 是曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 上任意点，于是有 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$，此点的法向量为 $\boldsymbol{t}=\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$，所以切平面为 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$。上式即是 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{a}$，于是和三个坐标轴截距为 $\sqrt{ax_0}$，$\sqrt{ay_0}$，$\sqrt{az_0}$，于是截距的和为 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=a$。

6. 切线方程：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$，法平面方程：$3x+3y-z=3$。

7. 提示：证明二曲面在点 $(1,1,2)$ 的两个切平面垂直。

考研真题答案

数一真题答案：1. $2x+4y-z-5=0$；2. A；3. 极小值点 $(9,3)$，极小值 3；极大值点 $(-9,-3)$，极大值 -3；4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；5. B；6. D；7. $yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y f_2'$；8. $f(x,y)$ 在 D 上的最大值 8，最小值 0；9. A；10. 最远点 $(-5,-5,5)$，最近点 $(1,1,1)$；11. 极小值 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$；12. B；13. A；14. 4；15. $f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$；16. B；17. $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$；18. 极大值 $\frac{1}{\sqrt{e}}$；极小值 $-\frac{1}{\sqrt{e}}$；19. A；20. 唯一极小值点 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$，极小值为 $f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$；21. $2x-y-z-1=0$；22. $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$；

23. $-dx$；24. 3；25. $-dx+2dy$；26. D；27. $f_1'(1,1)$；$f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)+f_2'(1,1)$；28. B；

29. $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$；30. $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$；31. (i) $a=b=-1$；(ii) $\frac{13}{3}\pi$。

数三真题答案：1. A；2. x^2+y^2；3. $-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$；4. $2e\,dx+(e+2)dy$；5. $\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$；6. D；

7. $\frac{2y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'$；8. B；9. $dz=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$，$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^2}$；10. $1+2\ln 2$；

11. 极小值 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$；12. $u_{\max}=5\sqrt{5}$，$u_{\min}=-5\sqrt{5}$；13. $(1+2\ln 2)(dx-dy)$；

14. $f_{11}''(2,2)+f_{12}''(1,1)f_2'(2,2)$；15. $2dx-dy$；16. $2-\ln 2$；17. $f(u)=\frac{1}{16}(e^{4u}-4u-1)$；

18. $-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$；19. D；20. $-dx+2dy$；21. D；22. xye^y；23. $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$；24. $1-3f_{11}''-f_{22}''$。

第9章

重积分

基本概念

1. 二重积分、累次积分(二次积分);
2. X-型区域、Y-型区域、θ-型区域、r-型区域;
3. 二重积分的一般坐标变换、极坐标变换;
*4. 三重积分、累次积分(三次积分);
*5. X-型柱体、Y-型柱体、Z-型柱体、可截Z-型区域;
*6. 三重积分的柱面坐标变换、球面坐标变换;
*7. 质心、形心、转动惯量。

基本结论

1. 二重积分的性质;
*2. 三重积分的性质。

基本方法

1. 交换累次积分的积分次序;
2. 平面直角坐标与极坐标的累次积分转化;
3. 对称区域上的二重积分;
4. 非初等二元函数的二重积分;
5. 利用简单的坐标变换计算二重积分;
6. 二重积分的解答与证明;
*7. 计算三重积分;
*8. 利用柱面坐标变换、球面坐标变换计算三重积分;
*9. 计算质心坐标、转动惯量。

9.1 二重积分

一、基本概念

定义 1 二重积分定义：

设二元函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上有定义，用分法 T 将闭区域 D 分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\quad \Delta\sigma_2,\cdots,\quad \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$既表示第 i 个小区域，又表示它的面积。在 $\Delta\sigma_i$上任取一点 (ξ_i,η_i)，$\lambda(T)$ 表示分法 T 将 D 分成的所有小区域的直径的最大值(细度)。若极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

存在，且 I 与分法 T 和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，并称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**，D 称为**积分区域**。

二重积分的几何意义：

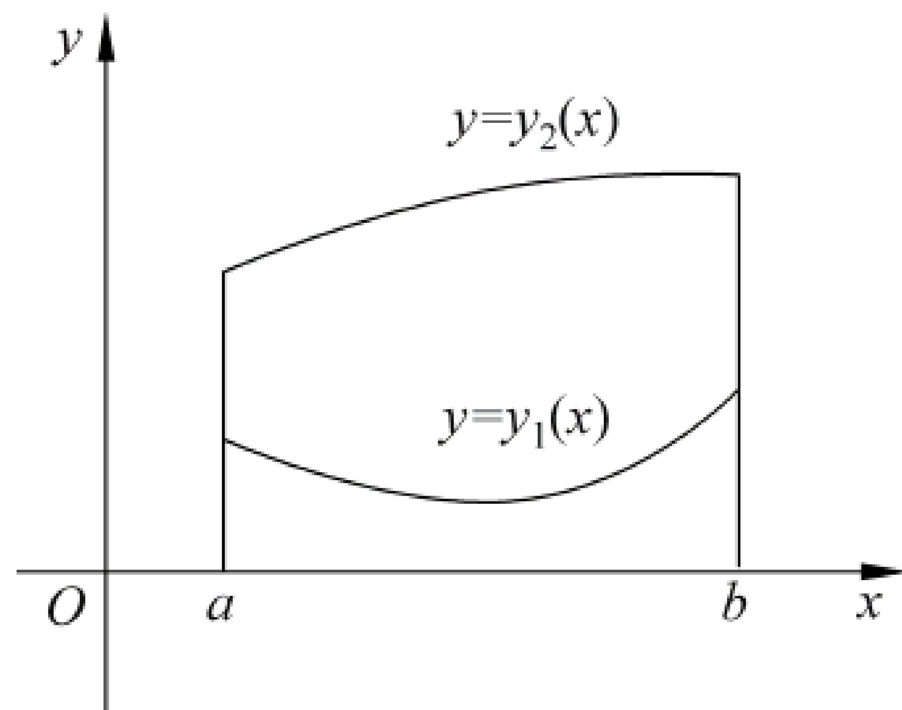
(1) 当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，以区域 D 为底，母线平行 z 轴的曲顶柱体的体积；

(2) 一般情况下，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示区域 D 上在 xOy 面上方曲顶柱体的体积与在 xOy 面下方曲顶柱体的体积的差。

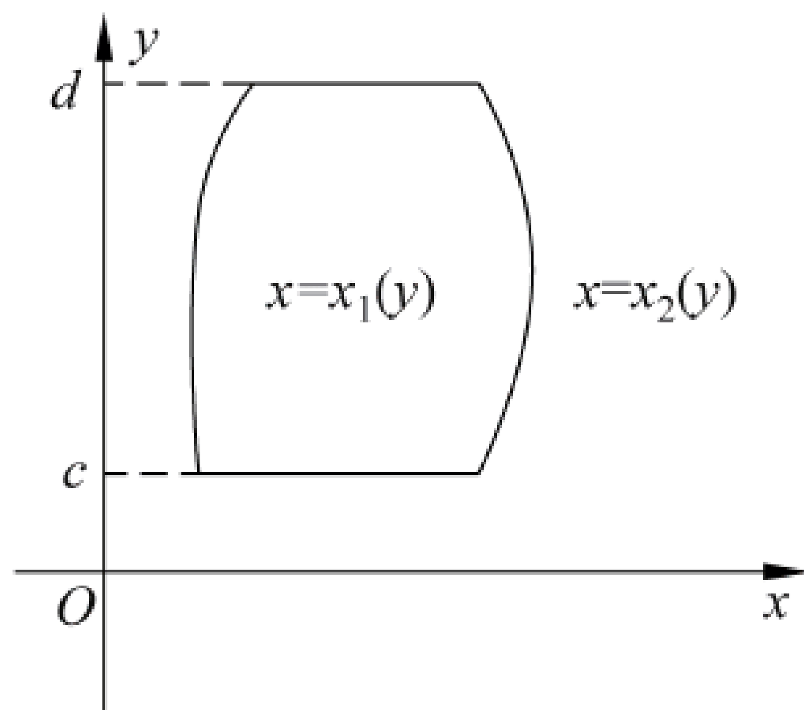
定义 2 积分区域的分类：

(1) **X-型区域**：左右分别由直线 $x=a$ 和 $x=b$，下上分别由曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 围成的区域，记为 $D_x=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$，如图 9-1(a)所示，则

$$\iint_{D_x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y。$$



(a)



(b)

图 9-1

（2）**Y-型区域**：下上分别由直线 $y=c$ 和 $y=d$，左右分别由曲线 $x=x_1(y)$ 和 $x=x_2(y)$ 围成的区域，记为 $D_y=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$，如图 9-1(b)所示，则

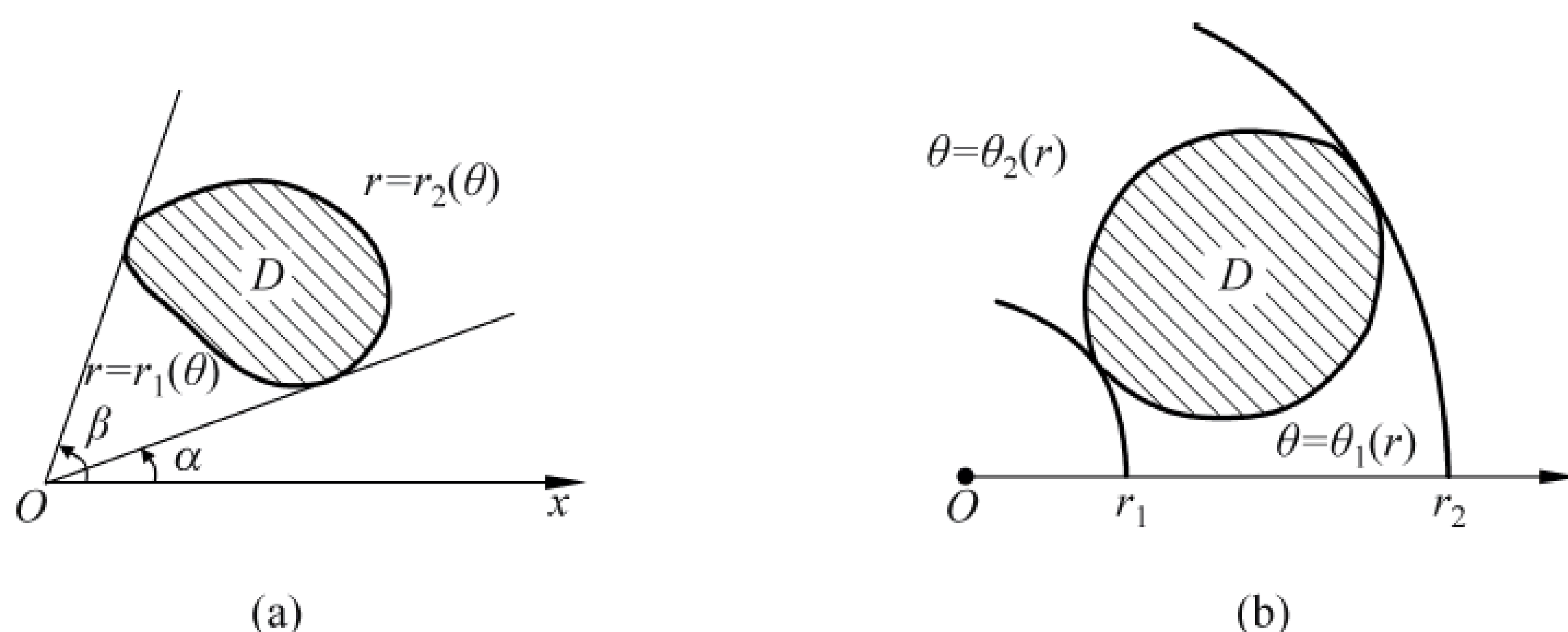
$$\iint\limits_{D_y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x。$$

（3）**$\boldsymbol{\theta}$-型区域**：过原点作两条射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 与区域边界线相切，两切点将区域边界分为两条曲线 $r=r_1(\theta)$ 和 $r=r_2(\theta)$，记 $D_\theta=\{(\theta,r)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\}$，如图 9-2(a)所示，则

$$\iint\limits_{D_\theta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r。$$

（4）**$\boldsymbol{r}$-型区域**：作圆 $r=r_1$ 和 $r=r_2$，分别切于区域的内侧和外侧，两切点将区域边界分成两条曲线 $\theta=\theta_1(r)$ 和 $\theta=\theta_2(r)$，记为 $D_r=\{(\theta,r)\mid r_1\leqslant r\leqslant r_2, \theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r)\}$，如图 9-2(b)所示，则

$$\iint\limits_{D_r} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta。$$



(a)　　(b)

图　9-2

关于区域要说明的是：

（1）围成区域的曲线，如 $y=y_1(x)$、$y=y_2(x)$、$x=x_1(y)$、$x=x_2(y)$、$r=r_1(\theta)$、$r=r_2(\theta)$、$\theta=\theta_1(r)$和 $\theta=\theta_2(r)$都是初等函数，是仅用一个解析式表达的函数。

（2）分割区域：若区域不是 X-型区域，可以用垂直于 x 轴的直线，将区域分割成几个 X-型区域；若区域不是 Y-型区域，可以用垂直于 y 轴的直线，将区域分割成几个 Y-型区域；若区域不是 θ-型区域，可以用过原点的射线，将区域分割成几个 θ-型区域；若区域不是 r-型区域，可以用圆心在原点的圆，将区域分割成几个 r-型区域。

（3）在确定 θ-型区域时，通常是过原点作区域边界线的切线，但有时可能不是切线，而是 θ 从最小到最大的两射线与边界线的交线；同样在确定 r-区域时，通常作圆心在原点的圆与边界线相切，但有时可能不是相切，而是半径为 r 的最小到最大两圆与边界线相交。

二、基本结论

定理 1（二重积分的性质）

（1）**面积公式**　$\overline{D}=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\overline{D}$ 是区域的 D 面积，且 $\iint\limits_D k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\overline{D}$。

(2) **线性性质** 设 k 是常数,则

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(3) **区域的可加性** 将区域 D 分成两个区域 D_1 和 D_2,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(4) **保序性** 若 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$, $(x,y)\in D$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

(5) **估值定理** 设 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值,则

$$m\overline{D} \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M\overline{D}。$$

(6) **积分中值定理** 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $\exists(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\overline{D}。$$

积分中值定理几何意义:曲顶柱体的体积等于某个同底的以某一点函数值为高的平顶柱体的体积。

(7) **奇偶性与对称性** 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续,积分区域 D 关于 x 轴对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y)\text{ 关于 } y \text{ 奇函数}, \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 } y \text{ 偶函数}, \end{cases}$$

其中 D_1 是 D 在 x 轴的上(下)半部分。同样,若积分区域 D 关于 y 轴对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 奇函数}, \\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 偶函数}, \end{cases}$$

其中 D_2 是 D 的在 y 轴的右(左)半部分。

(8) **轮换对称性** 若积分区域 D 具有轮换对称性(即 x,y 互换,区域不变),则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

注 若 $f(-x,y)=f(x,y)$,则称 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数;若 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则称 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数;同样,若 $f(x,-y)=f(x,y)$,则称 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数;若 $f(x,-y)=-f(x,y)$,则称 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数。

区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$ 关于 x,y 具有轮换对称性,即 x,y 互换,区域不变。

三、二重积分的计算方法

计算二重积分有三个方法,分别是:

方法1 利用性质计算二重积分

计算二重积分,首先考虑利用积分性质:面积公式、线性性质、区域的可加性、奇偶性与

对称性和轮换对称性。对一些二重积分来说，这些性质是十分重要的。

例 9.1　计算 $\iint\limits_D (1+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$|x|+|y|\leqslant 1$。

解　根据积分线性性质，有

$$\iint\limits_D (1+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

根据面积公式有 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{D}=2$。由于积分区域关于 x 轴和 y 轴都是对称的，根据奇偶性和对称性知 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。于是有

$$\iint\limits_D (1+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2。$$

方法 2　将二重积分转化为累次积分(二次积分)

将二重积分转化为累次积分是计算二重积分的基本方法。

在转化累次积分时，需要考虑两个因素：一是被积函数，二是积分区域。由于被积函数的原因，有些二重积分转化为累次积分只能先对 x 积分，后对 y 积分。如 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_?^? \mathrm{d}y\int_?^? \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x;$$

而有些二重积分只能先对 y 积分，后对 x 积分。如 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_?^? \mathrm{d}x\int_?^? \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y。$$

如果没有这个因素制约，一般考虑积分区域。若积分区域 D 是 X-型区域：

$$D_x=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

可将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 形式的累次积分；若积分区域 D 是 Y-型区域：

$$D_y=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\},$$

就将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成 $\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 形式的累次积分。

例 9.2　计算 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$x=-1$ 和 $y=1$ 所围成的闭区域。

解　积分区域 D 如图 9-3 所示，它既是 X-型区域，又是 Y-型区域。按照 X-型区域将二重积分转化为先对 y 后对 x 的积分次序的累次积分，有

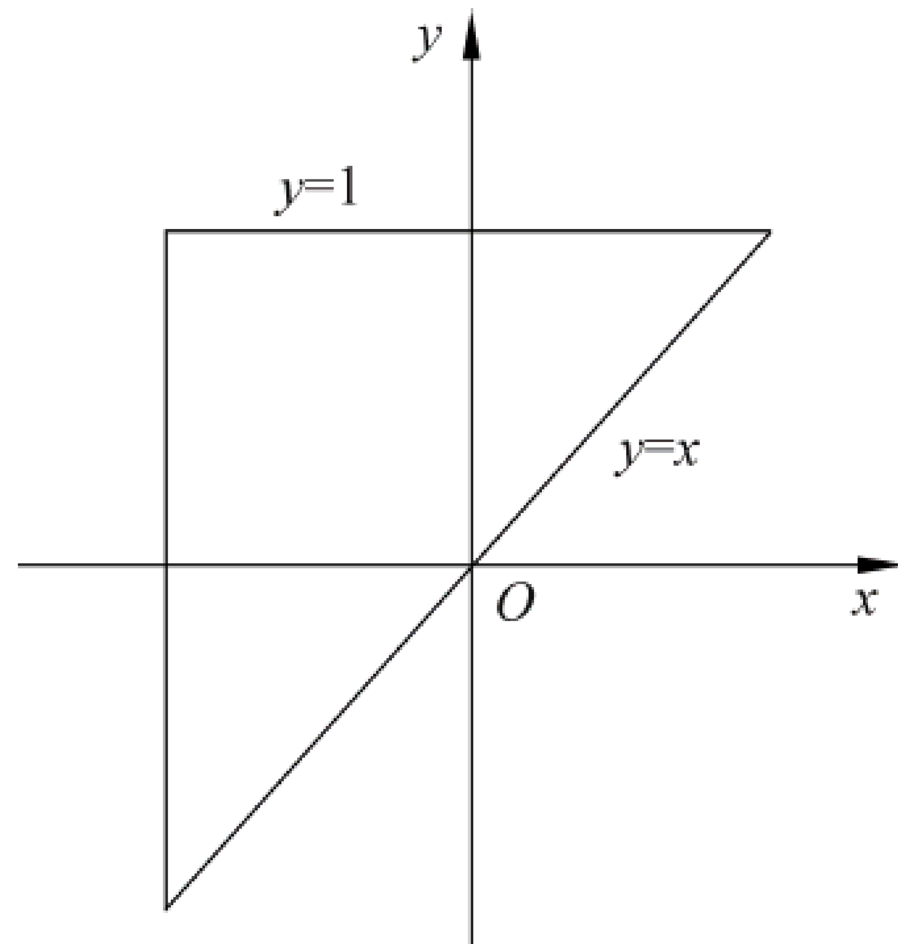


图　9-3

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 (x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x-\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=-2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}。$$

按照 Y-型区域，将二重积分转化为先对 x 后对 y 的积分次序的累次积分，有

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{y}x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(y^2-1)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}。$$

方法3 利用简单的变量替换计算二重积分

(1) **一般的坐标变换**：如果积分区域既不是 X-型区域又不是 Y-型区域，且分割区域比较复杂，或被积函数比较复杂，常考虑坐标变换。

令 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，或 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$，称为**雅可比行列式**，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$。

注 坐标变换后，新的区域 D' 是原区域 D 的边界曲线经变换后得到的曲线所围成的区域。

(2) **极坐标变换**：如果积分区域是圆或圆的一部分(如扇形、圆环、扇环、半圆)，或被积函数含有“x^2+y^2”，一般应用极坐标变换，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，其中 θ 与 r 的积分上下限根据具体 θ-型区域或 r-型区域确定，雅可比行列式 $J(u,v)=r$。

在极坐标系下，化二重积分为二次积分，一般选择积分次序是先 r 后 θ，定限时除了利用 θ-型区域外，也可以用**穿线法**又称**穿透法**。为确定 θ 的上下限，从原点出发作射线沿逆时针方向转动，射线与积分域开始接触时的 θ 角即为下限，离去时的 θ 角即为上限；为确定 r 的上下限，从原点出发作射线穿透整个区域，穿入时遇到的区域的边界曲线 $r_1(\theta)$ 为下限，穿出时离开的区域边界曲线 $r_2(\theta)$ 为上限。

例9.3 计算 $\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2-2x\leqslant0$。

解 【方法1】一般坐标变换：积分区域 D：$(x-1)^2+y^2=1$，令 $x=1+r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，有 $|J|=r$，从而有

$$\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1+r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta=\pi。$$

【方法2】极坐标变换：设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$|J|=r$，曲线 $r=2\cos\theta$，于是

$$\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\quad(\text{利用奇偶性与对称性})$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi。$$

注 若将二重积分转化为累次积分后没有办法计算，需要考虑利用二重积分的性质或做适当的坐标变换。坐标变换有两个目的：一是使被积函数比较简单，二是使积分区域比较简单。

题型 1　交换累次积分的积分次序

交换积分次序，主要有以下两个方面的考虑：

(1) 题目的本身要求；

(2) 计算累次积分的要求。

基本方法　根据累次积分，确定积分区域；根据积分区域或将区域进行分割，表示成另一个次序的累次积分。

例 9.4　交换下列累次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$。

解　(1) 积分区域如图 9-4(a)所示，它既是 X-型区域，又是 Y-型区域，按照 X-型区域将原累次积分表示为另一次序的累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$。



图　9-4

(2) 积分区域如图 9-4(b)所示，它既是 X-型区域，又是 Y-型区域，按照 Y-型区域将原累次积分表示为另一次序的累次积分 $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$。

(3) 积分区域是 Y-型区域，但不是 X-型区域，所以若交换积分次序，只能分割积分区域，将其分割成两个 X-型区域 D_1 和 D_2，如图 9-5(a)所示，利用积分区域的可加性有



图　9-5

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y。$$

(4) 积分区域如图 9-5(b)所示，它由两个 X-型区域 D_1 和 D_2 组成，构成 Y-型区域，所以按照 Y-型区域，将二重积分表示成累次积分，有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x。$$

题型 2　直角坐标与极坐标的累次积分转化

例 9.5　化下列直角坐标下的二次积分转化为极坐标下的二次积分：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$。

解　(1) 如图 9-6(a)所示，积分区域 D 不是 θ-型区域，用射线 $y=x$ 将积分区域 D 分成两个 θ-型区域 D_1 和 D_2，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

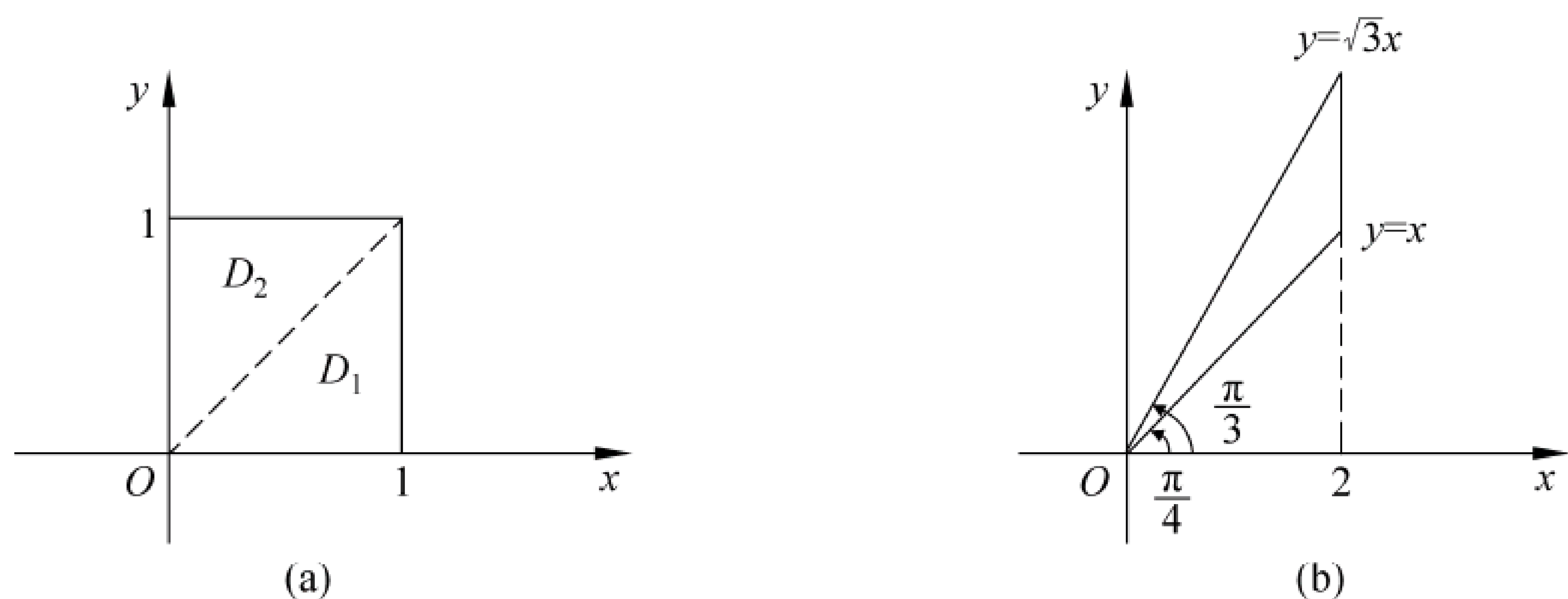


图 9-6

在区域 D_1 上，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$r$ 的上下限：包含原点，下限是 0；上限是 $x=1$，将 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入直线 $x=1$ 中，得 $r=\sec\theta$。在区域 D_2 上，$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$r$ 的上下限：包含原点，下限是 0；上限是 $y=1$，将 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入直线 $y=1$ 中，得到 $r=\csc\theta$。于是

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r。$$

(2) 如图 9-6(b)所示，积分区域 D 是 θ-型区域，$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，$r$ 的上下限：包含原点，下限是 $r=0$，穿出的线 $x=2$ 即为上限，将 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入 $x=2$ 中，解得 $r=2\sec\theta$。于是

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)r\mathrm{d}r。$$

(3) 如图 9-7(a)所示。穿透法，用过原点射线穿过积分区域，穿入的线 $x+y=1$ 即为下限，将 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入方程中，求得 $r=(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}$，穿出的线 $x^2+y^2=1$ 即为上限，解得 $r=1$，所以 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}}^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

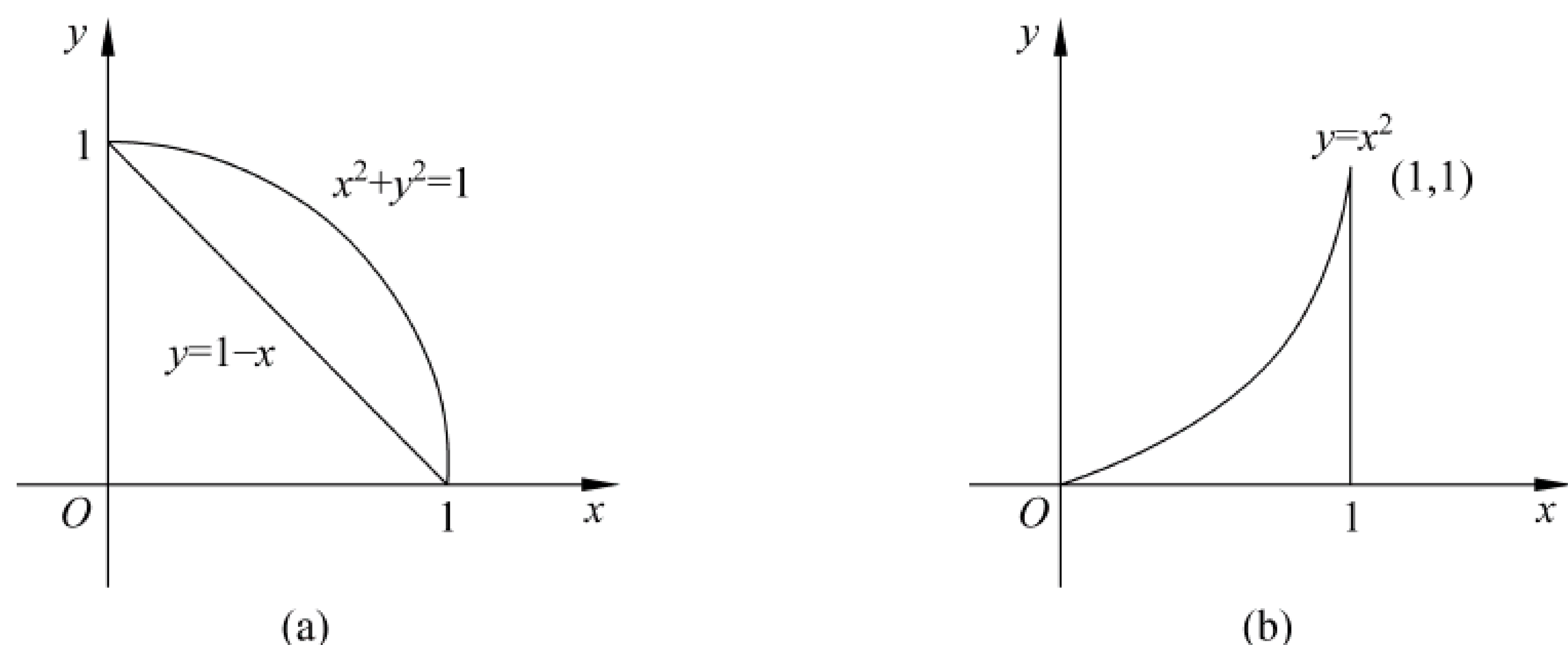


图 9-7

(4) 如图 9-7(b)所示，积分区域是 θ-区域。显然 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，确定变量 r 的上下限。穿透法：用过原点射线穿过积分区域，穿入的线 $y=x^2$ 即为下限，解得 $r=\sec\theta\tan\theta$，穿出的线 $x=1$ 即为上限，解得 $r=\sec\theta$。于是

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr。$$

注 将直角坐标下的累次积分转化为极坐标系下的累次积分的关键是确定积分区域，若积分区域是 θ-区域，可直接将二重积分表示成极坐标下的累次积分，若不是 θ-区域，用过原点的直线将区域分成几个 θ-型区域。

题型 3　计算对称区域上的二重积分

例 9.6　计算下列对称区域的积分：

(1) $\iint\limits_D (x^2-2\sin x+3y+2)dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 4$；

(2) $\iint\limits_D e^{|x|+|y|}dxdy$，其中 D：$|x|+|y|\leqslant 1$。

解　(1) 积分区域 D：$x^2+y^2\leqslant 4$ 是圆，它既关于 x 轴对称，又关于 y 轴对称，于是拆分积分，利用面积公式、奇偶性和对称性以及极坐标变换有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2-2\sin x+3y+2)dxdy&=\iint\limits_D x^2dxdy-2\iint\limits_D \sin xdxdy+3\iint\limits_D ydxdy+2\iint\limits_D dxdy\\&=\iint\limits_D x^2dxdy-0+0+2\overline{D}\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr+2\cdot 4\pi=4\pi+8\pi=12\pi。\end{aligned}$$

(2) 积分区域 D：$|x|+|y|\leqslant 1$，如图 9-8 所示，它既关于 x 轴对称，又关于 y 轴对称，而被积函数 $e^{|x|+|y|}$ 关于 x 和 y 都是偶函数。设 D_1 是 D 的第一象限部分，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{|x|+|y|}dxdy&=4\iint\limits_{D_1} e^{|x|+|y|}dxdy=4\iint\limits_{D_1} e^{x+y}dxdy\\&=4\int_0^1 e^xdx\int_0^{1-x} e^ydy=4\int_0^1 e^x(e^{1-x}-1)dx=4。\end{aligned}$$

题型 4　计算非初等函数的二重积分

常见的非初等函数有：绝对值函数，最大值、最小值函数，分段函数，整数函数。

基本方法：分割积分区域，将 D 分割成 D_1 和 D_2，利用积分区域的可加性，有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

使被积函数 $f(x,y)$ 在区域 D_1 和 D_2 上都是初等函数。

注　上述个别函数也可能是初等函数，但为了便于分类研究，我们不加甄别的看作非初等函数，这样有利于二重积分的计算。另外，区域 D 有时可能被分割成不止两个区域，分割的方法和数量与被积函数有关，确保被积函数在每个区域是二元初等函数。

例 9.7　计算下列非初等函数的积分：

(1) $\iint\limits_D |x-y^2|dxdy$，其中 D：$[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 D：$[0,1]\times[0,1]$。

解 (1) 为去掉 $|x-y^2|$ 绝对值，用 $x-y^2=0$，将区域 D 分成 D_1 和 D_2，如图 9-9(a) 所示，则

$$\iint\limits_D |x-y^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}|x-y^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|x-y^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}(y^2-x)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1(x-y^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y^4\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\frac{1}{2}y^4-y^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{11}{30}。$$

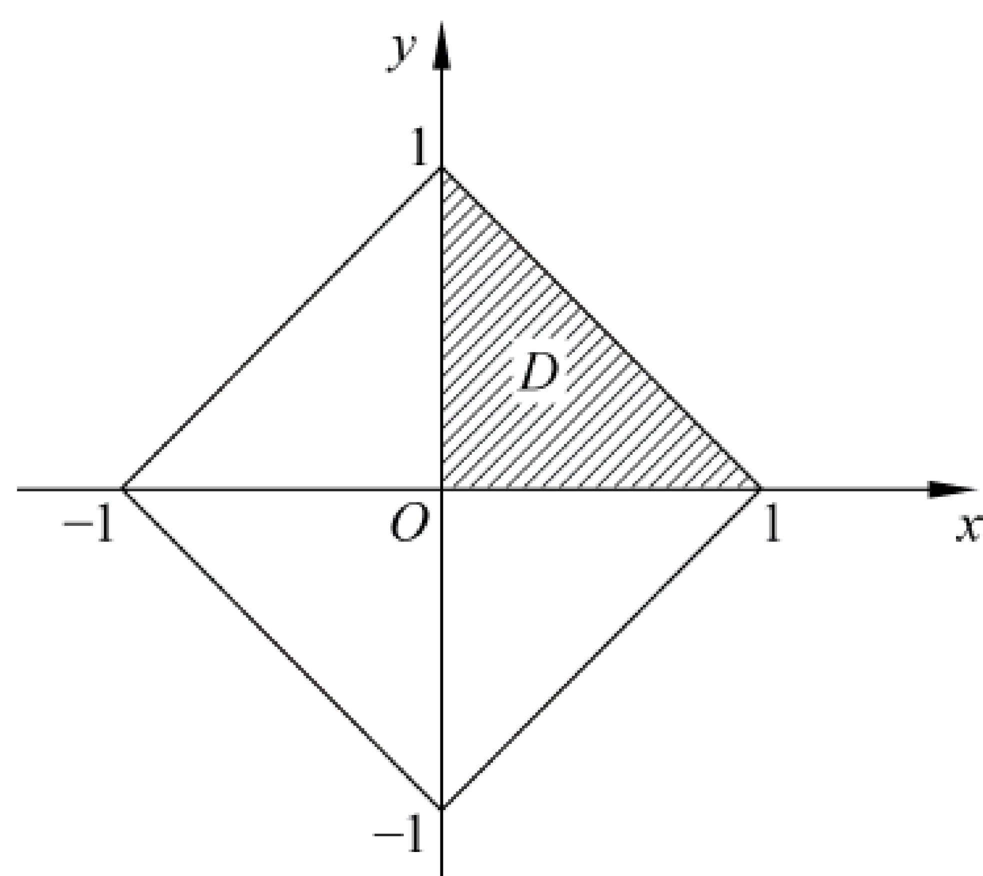
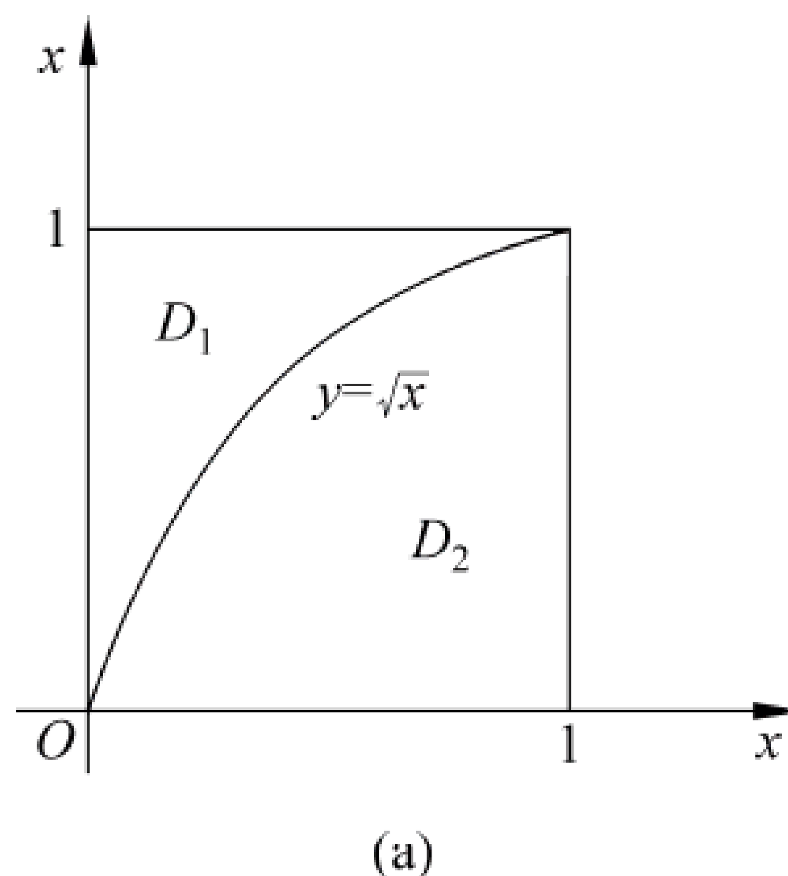
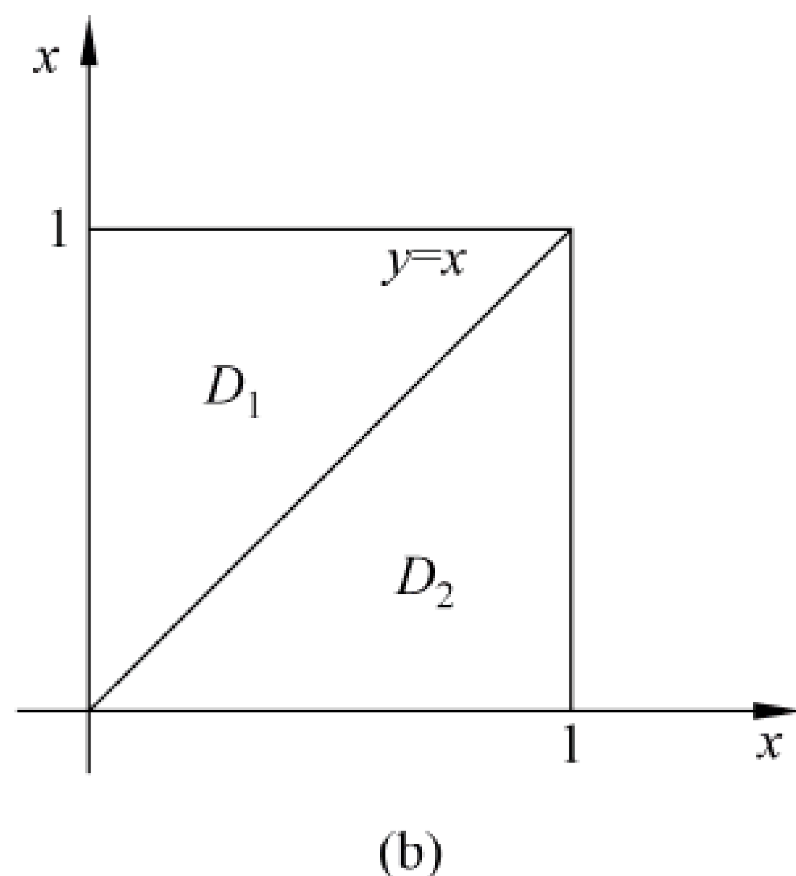


图 9-8



(a)



(b)

图 9-9

(2) 为确定 $\max\{x^2,y^2\}$，用 $x=y$ 把积分区域 D 分成 D_1 和 D_2，如图 9-9(b) 所示，于是有

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1。$$

注 例 9.7(1)为了去掉绝对值，需要考虑被积函数 $x-y^2$ 是大于零还是小于零，所以就用 $x-y^2=0$ 分割积分区域，函数在分割后的区域或者大于零，或者小于零；同样例 9.7(2) 为了去掉 max 符合，需要考虑是 $x^2>y^2$，还是 $x^2<y^2$，于是就用 $x=y$ 去分割积分区域。

计算非初等函数的二重积分的基本方法

利用二重积分的积分区域的可加性，将积分区域分成几个区域，使得被积函数在每个积分区域上都是初等函数，从而将非初等函数的二重积分表示为几个初等函数的二重积分的和。

题型 5 利用坐标变换计算二重积分

例 9.8 利用简单的坐标变换，计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$； (2) $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqslant a^{\frac{2}{3}}$；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成的区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $x^2+y^2=1$ 的第一象限部分。

解 (1) 作广义极坐标变换,令 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$,则有 $|J|=abr$,积分区域转化为 D':$r=1$ 是一个圆。于是

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta\cdot abr\cdot\mathrm{d}r=a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=a^3b\times\pi\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi a^3b。$$

(2) 令 $x=a(r\cos\theta)^3$, $y=a(r\sin\theta)^3$,积分区域转化为 D':$r=1$ 是一个圆,则有 $0\leqslant r\leqslant1$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,雅可比行列式 $|J|=9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta$,于是

$$\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}r=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}a^2\cdot4\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}a^2\pi。$$

(3) 令 $u=x+y$, $v=y$,则 $|J|=1$。积分区域转化为 D':由 $u=1$, $u=v$, $v=0$ 围成,于是 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$。

(4) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则有 $|J|=r$,于是

$$\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x\quad(令\ x=r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left[\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)。$$

利用坐标变换计算二重积分方法综述

利用坐标变换计算二重积分是计算二重积分常用方法。

如果积分区域是圆或圆的一部分,或者被积函数含有“x^2+y^2”,一般是做极坐标变换,如例 9.8 的(4)题。在例 9.8 的(1)题中,做广义极坐标变换。

在坐标变换过程中,原积分区域 D 变成 D',边界线变成边界线,即线变线。如例 9.8 的(3)题,经 $u=x+y$, $v=y$ 坐标变换后,$x+y=1$ 转化为 $u=1$, $x=0$ 转化为 $u=v$, $y=0$ 转化为 $v=0$;同样,例 9.8 的(2)题,经 $x=a(r\cos\theta)^3$, $y=a(r\sin\theta)^3$ 坐标变换后,$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 转化为 $r=1$,是一个圆,前者化简被积函数,后者化简积分区域。

坐标变换不外乎两个目的:其一是使积分区域变得简单,如例 9.8 的(1)题和(2)题;其二是使被积函数变得简单,如例 9.8 的(3)题和(4)题。

题型 6 二重积分的解答与证明

例 9.9 已知 $f(x)$ 连续,$f(0)=0$, $f'(0)=1$,求极限

$$\lim_{t\to0}\frac{\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^3},$$

其中 D:$x^2+y^2\leqslant t^2$。

解 将二重积分化为累次积分,最后化为变限积分函数,运用洛必达法则

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r)r\mathrm{d}r}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi\int_0^t f(r)r\mathrm{d}r}{t^3}$$

$$=2\pi\lim_{t\to 0}\frac{tf(t)}{3t^2}=\frac{2}{3}\pi\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}。$$

由于 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,所以

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^3}=\frac{2}{3}\pi\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{2}{3}\pi f'(0)=\frac{2}{3}\pi。$$

例 9.10 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\mathrm{d}t\int_t^x \mathrm{e}^{(t-u)^2}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$。

解 极限函数的分子是变限积分函数的形式,但被积函数含有 x,不能用求导公式求导,因此需要交换积分次序,则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\mathrm{d}t\int_t^x \mathrm{e}^{(t-u)^2}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{e}^{(t-u)^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{(t-x)^2}\mathrm{d}t}{x}\ (令\ t-x=s)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^0 \mathrm{e}^{s^2}\mathrm{d}s}{x}=\lim_{x\to 0}(-\mathrm{e}^{x^2})(-1)=1。$$

例 9.11 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\sqrt{3+\cos(x+y)}\mathrm{d}x$。

解 分子无论怎样变化,都没办法转化为变限积分函数可求导的形式,于是利用二重积分的中值定理,得到

$$\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\sqrt{3+\cos(x+y)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\sqrt{3+\cos(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\pi t^2\sqrt{3+\cos(\xi+\eta)}。$$

其中 $D:x^2+y^2\leqslant t^2, x,y>0$, $(\xi,\eta)\in D$。由于 $t\to 0^+$ 时, $(\xi,\eta)\to(0,0)$,所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\sqrt{3+\cos(x+y)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\sqrt{3+\cos(\xi+\eta)}=\frac{\pi}{2}。$$

例 9.12 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,计算 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$。

解 将 $f(x)$代入定积分中,定积分变为累次积分,由于没办法直接计算,所以应该交换累次积分的积分次序,于是

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\sin t}{t}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\cos 1-1)。$$

例 9.13 计算二重积分 $\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$。

解 由于积分区域 D 具有轮换对称性,所以 $\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

所以有

$$\iint\limits_D \sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D \sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \sin r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-\cos a^2)。$$

例 9.14 证明不等式：$1\leqslant\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}$，其中 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$。

证明 由于 D 关于 x,y 具有轮换对称性，所以 $\iint\limits_D\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(\cos x^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

而 $1\leqslant\cos x^2+\sin x^2=\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，所以 $1\leqslant\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}$。

例 9.15 设闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0$，$f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y)$ 的表达式。

解 半圆 $x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0$ 的面积是 $\frac{\pi}{8}$，对上述等式两边在区域 D 上积分，得到

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\bar{D},$$

所以有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

于是 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$。

练习题 9-1

1. 利用二重积分的性质，求下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D(x+y)f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=[-1,1]\times[-1,1]$，f 在 D 上连续；

(2) $\iint\limits_D(2+x\cos xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-y\leqslant x\leqslant y\}$；

(3) $\iint\limits_D(1-xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$。

2. 交换累次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$；　　(2) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

(3) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；　　(4) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$。

3. 计算下列累次积分：

(1) $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$；　　(2) $\int_\pi^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$；

(3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1-x^4} dx$；　　(4) $\int_0^1 dy \int_y^1 \sin x^2 dx$。

4. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xy\,dxdy$,其中 D 是矩形区域：$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 2$；

(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$,其中 D 由直线 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=2$ 所围成区域；

(3) $\iint\limits_D y\,dxdy$,其中 D 由 $y=x^2$，$y=4x^2$ 和 $y=1$ 所围成区域；

(4) $\iint\limits_D (x\cos y + y)dxdy$,其中 D 是 $x^2+y^2=4$ 上半圆。

5. 计算下列非初等二元函数的二重积分：

(1) $\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$,其中 $D=\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_D [x+y]dxdy$,其中 D：$0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2$，$[x+y]$ 是不超过 $x+y$ 的最大整数；

(3) $\iint\limits_D \sin x \sin y \max\{x,y\}dxdy$,其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$；

(4) $\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy$,其中 $D=\{(x,y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$。

6. 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{1+2x^2}{1+x^2+y^2}dxdy$，$D$：$x^2+y^2 \leqslant 1, x+y \geqslant 0$。

7. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 和 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体体积。

8. 求由平面 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围成的柱体被抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 和平面 $z=0$ 截得的立体体积。

9. 计算 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$,其中 $f(x)=\int_x^1 e^{-y^2} dy$。

10. 已知 $f(x)$ 连续,且恒大于 0,证明：$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2$。

11. 已知 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，令 $F(t)=\iint\limits_{D(t)} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 $D(t)$：$x^2+y^2 \leqslant t^2$。求 $F''(0)$。

12. 设 $f(x)$ 是连续函数，$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4$，求 $f(x)$。

*9.2 三重积分

一、基本概念

定义 3 三重积分 设 $f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω 上有定义，用分法 T 将 Ω 分割成 n 个小闭区域 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$，$\lambda(T)$ 表示 n 个小空间立体 Δv_i的直径的最大值，在 Δv_i上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)。若 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i = I$ 存在，且 I 与分法 T 和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上**可积**，并称 I 为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 或 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

其中 Ω 是**积分区域**，$f(x,y,z)$是**被积函数**，$\mathrm{d}v$ 是**体积微元**。

三重积分的物理意义 如果 $f(x,y,z)$ 表示物体在 (x,y,z) 处的密度，Ω 是物体所占有的空间区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 就是物体 Ω 的质量 M。

定义 4 积分区域分类：

(1) **Z-型柱体** 如果柱体 Ω 的母线平行于 z 轴，底面是“一个曲面” S_1：$z=z_1(x,y)$，顶面是“一个曲面” S_2：$z=z_2(x,y)$，则称 Ω 是 **Z-型柱体**。记为

$$\Omega = \{(x,y) \mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\},$$

其中 D_{xy}是 Ω 在 xOy 面上的投影，如图 9-10(a)所示。类似定义 X-型柱体和 Y-型柱体。

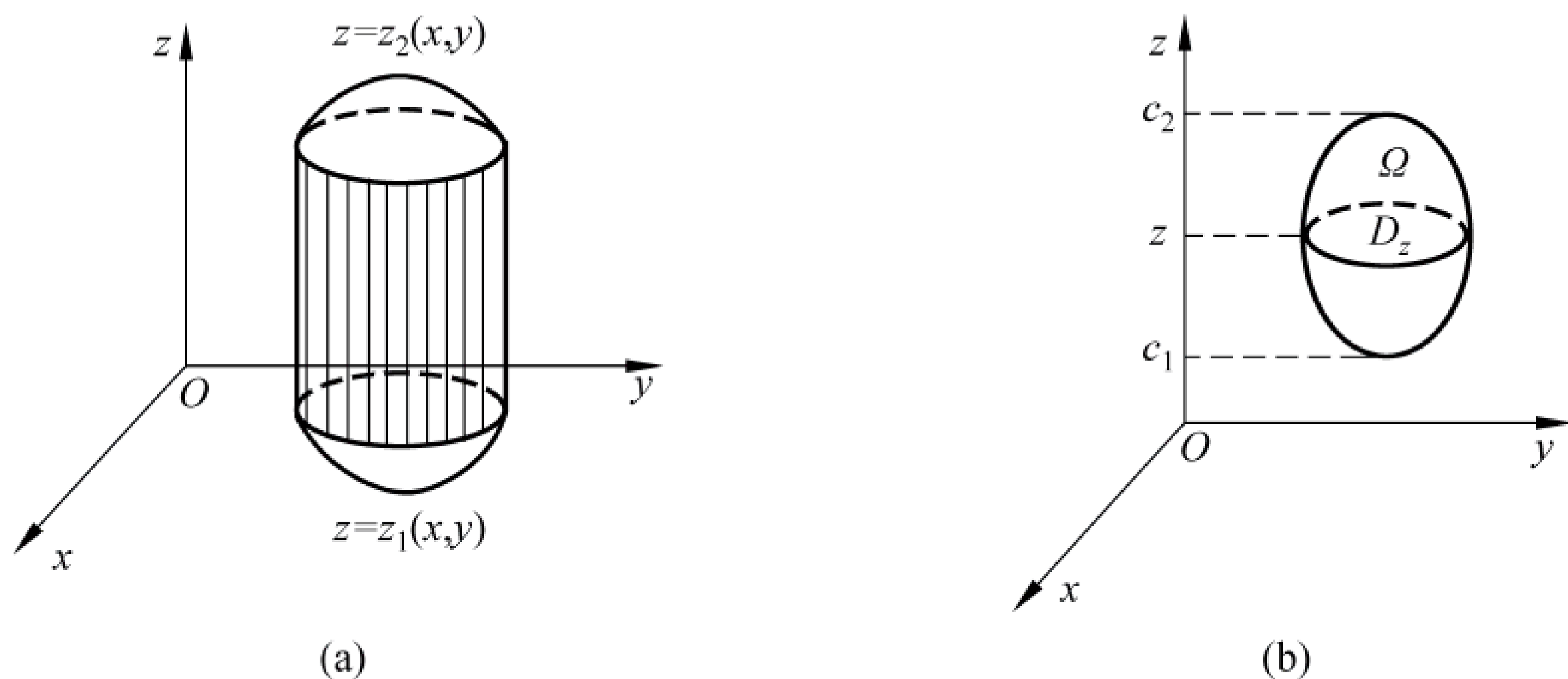


图 9-10

(2) **可截 Z-型区域** 如果空间区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D_z, c_1\leqslant z\leqslant c_2\},$$

其中 D_z是垂直于 z 轴的平面截区域 Ω 所得到的平面区域，且在 $c_1\leqslant z\leqslant c_2$范围上，$D_z$的边界曲线方程 $F(x,y,z)=0$ 是唯一表示，则称这类区域为**可截 Z-型区域**（简称**可截区域**），如图 9-10(b)所示。

确定 Z-型柱体的顶面和底面的两个方法：

(1) 穿透法：用平行于 z 轴的直线(或垂直于 xOy 面)自上而下穿透区域,穿入的曲面是顶面,穿出的曲面是底面。

(2) 投影法：积分区域 Ω 在 xOy 面的投影 D_{xy},一般是 Ω 的两个曲面的交线的投影,这个交线上方的曲面是顶面,下方的曲面是底面。

二、基本结论

定理 2(三重积分的性质)

(1) **体积公式** 设 $\bar{\Omega}$ 为空间区域 Ω 的体积，则 $\bar{\Omega}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$。

(2) **线性性质** 若 k 是任意常数,则

$$\iiint\limits_{\Omega} kf(x,y,z)\mathrm{d}v = k\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v;$$

$$\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v\pm\iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}v。$$

(3) **积分区域可加性** 将 Ω 分成两个区域 Ω_1 和 Ω_2,则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}v。$$

(4) **奇偶性与对称性** 设函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，Ω 关于 xOy 坐标面对称,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}0, & f\text{ 关于 } z \text{ 是奇函数},\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f\text{ 关于 } z \text{ 是偶函数},\end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 被 xOy 坐标面分成的半部分。

当然,性质 4 还有其他两种情况,请读者自己给出。$f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 是奇函数或偶函数定义与二元函数类似。

(5) **轮换对称性** 若积分区域 Ω 关于 x 和 y 具有轮换对称性,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}v。$$

当然,性质(5)还有其他两种情况,请读者自己给出。

三、基本方法

题型 7 计算三重积分

计算三重积分有两个基本方法,分别是：

方法 1 投影法

定理 3 设 Ω 是有界闭区域，$f(x,y)$ 在 Ω 上连续,Ω 是 Z-型柱体,Ω 在 xOy 坐标面上的投影为 D_{xy}，即 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z。$$

方法 2 截面法

定理 4 设 Ω 是有界闭区域，$f(x,y)$ 在 Ω 上连续，若 Ω 是可截 Z-型区域，即

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c_1\leqslant z\leqslant c_2\},$$

则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

投影法和截面法是不同的两个方法，究竟应用哪个方法，一般是由积分区域决定的。如果是 Z-型柱体，就用投影法，如果不是 Z-型柱体，而是可截 Z-型区域，就用截面法。如果既不是 Z-型柱体，又不是可截 Z-型区域，可以分割成几个 Z-型柱体或可截 Z-型区域，或者将积分区域表示为两个区域(Z-型柱体，或是可截 Z-型区域)的和或差。

投影法是先一后二的积分，即先计算一个定积分，后计算一个二重积分；而截面法是先二后一的积分，即先计算二重积分分，后计算一个定积分。

例 9.16 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 围成的闭区域。

解 积分区域 Ω 是 Z-型柱体，底面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，顶面 $z=2$，积分区域 Ω 在 xOy 面上的投影为：$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4\}$，如图 9-11。于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}[4-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r\quad\text{(利用极坐标变换)}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2=4\pi。\end{aligned}$$

例 9.17 计算由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 下方和平面 $z=-1$ 上方所围成的区域(图 9-12)的体积。

解 根据三重积分的性质 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$。由于积分区域 Ω 不是 Z-型柱体，但可表为

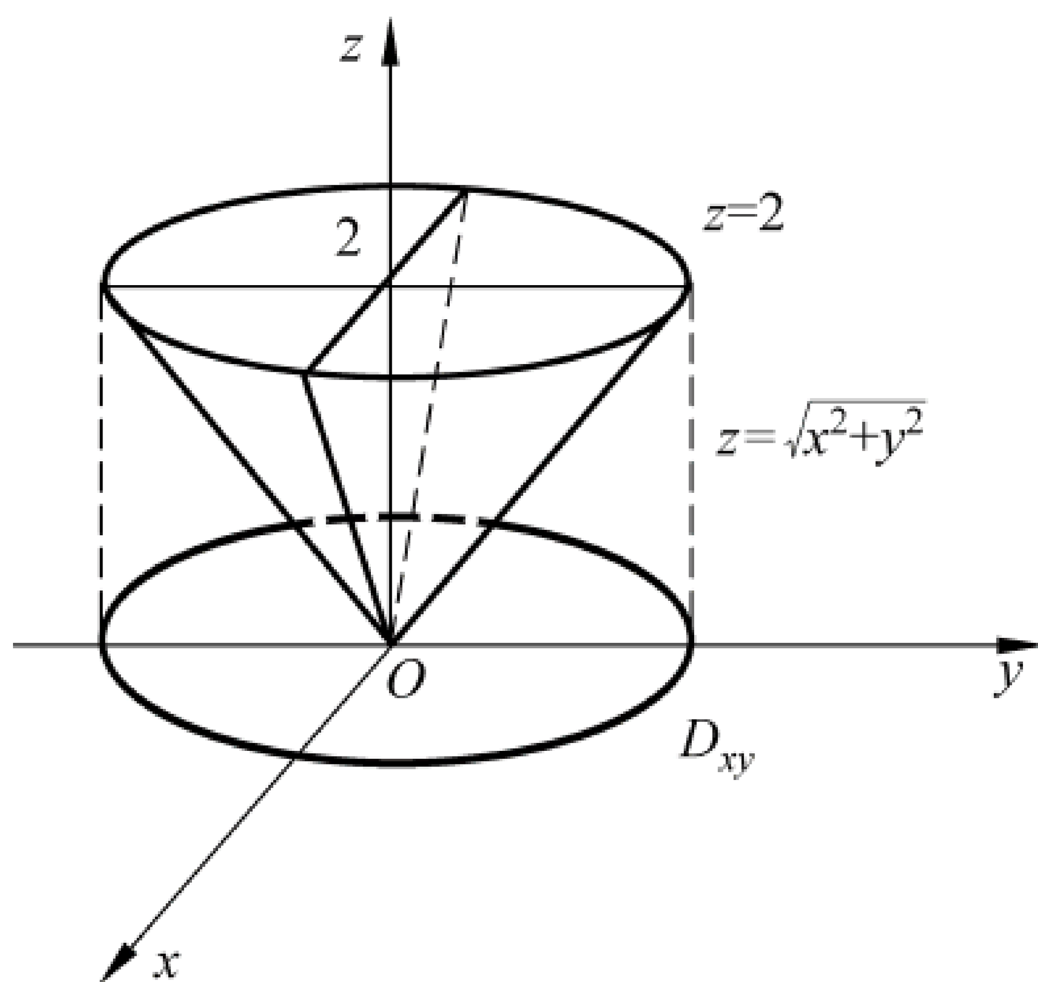


图 9-11

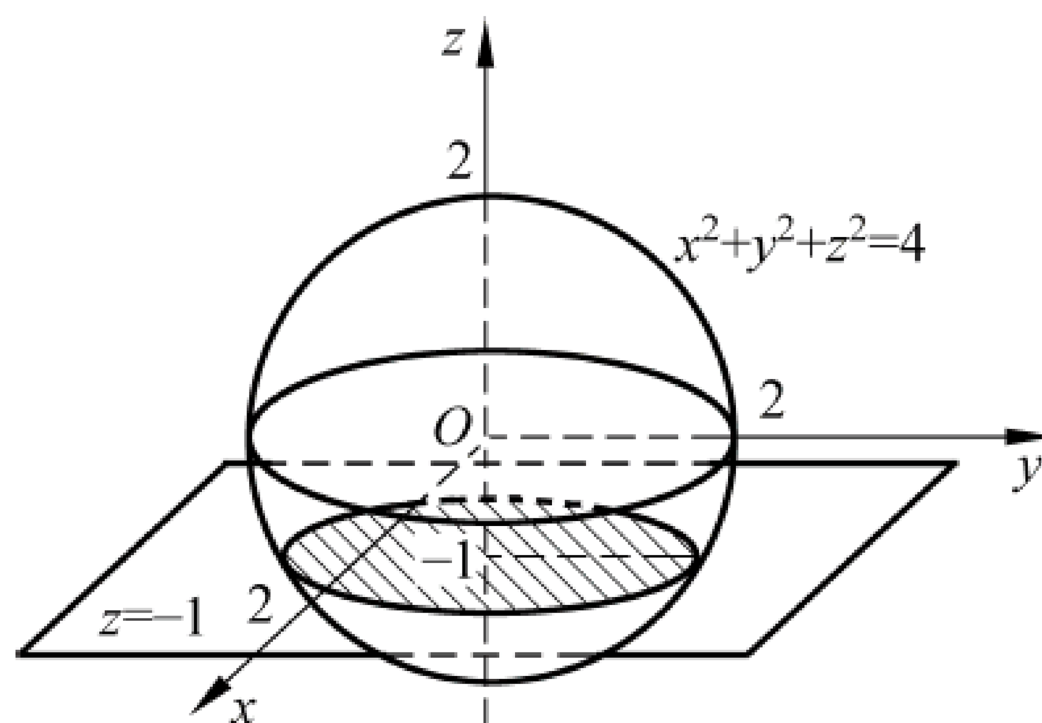


图 9-12

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant4-z^2,-1\leqslant z\leqslant2\},$$

所以，积分区域是可截 Z-型区域。D_z 是一个圆 $x^2+y^2\leqslant4-z^2$，圆的面积是 $\pi(4-z^2)$，于是

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\overline{D}_z\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-1}^{2}\pi(4-z^2)\mathrm{d}z=\pi\left(4z-\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{-1}^{2}=9\pi。$$

例 9.18 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上半部分与平面 $z=0$ 围成的区域。

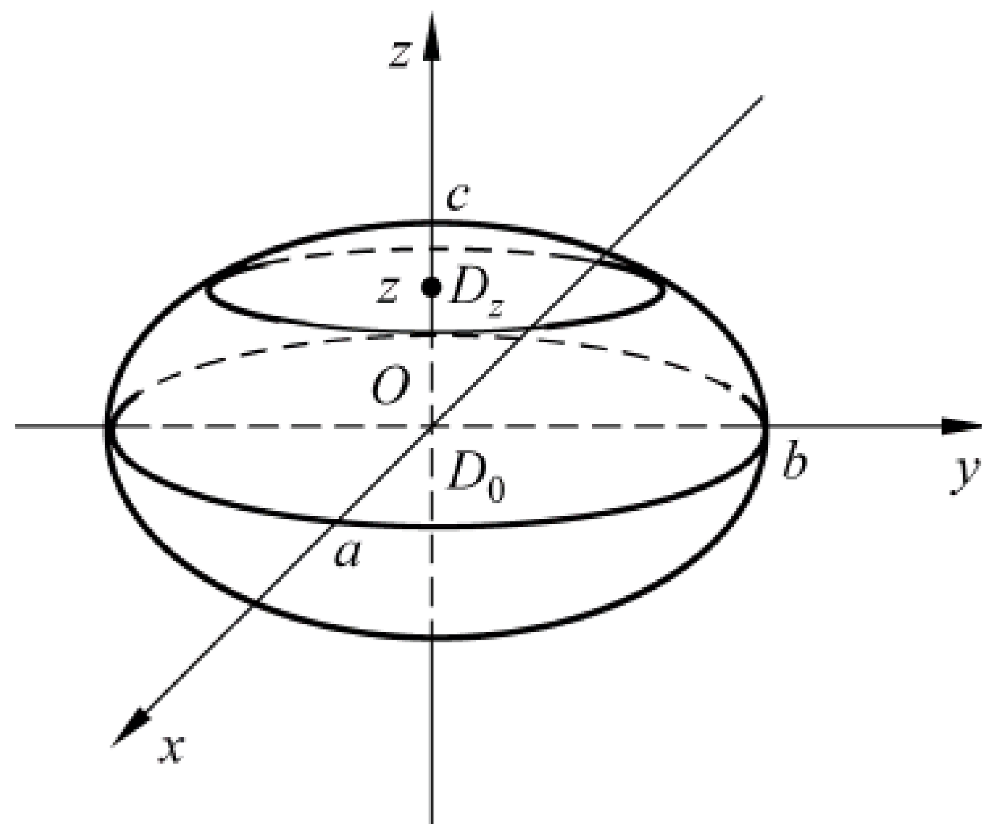


图 9-13

解 【截面法】将三重积分化为"先二后一"的积分，如图 9-13，截面为 D_z：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}$，椭圆的面积是 $\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$，于是

$$I=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^c z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^c\overline{D}_z z\mathrm{d}z=\int_0^a\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})z\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi abc^2。$$

【广义球面坐标变换】令 $x=ra\sin\varphi\cos\theta$，$y=rb\sin\varphi\sin\theta$，$z=rc\cos\varphi$，则 $J=abcr^2\sin\varphi$，于是

$$I=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 rc\cos\varphi\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=abc^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\times\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi abc^2。$$

例 9.19 设 $f(x)$ 是连续函数 $f(0)=0$，$F(t)=\iiint_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω_t 是柱面 $x^2+y^2=t^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 部分，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$。

解 区域 Ω_t 在 xOy 投影 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant t^2$，则

$$F(t)=\iiint_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}z$$
$$=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{3}+f(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\left[\frac{1}{3}+f(r^2)\right]r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t r\left[\frac{1}{3}+f(r^2)\right]\mathrm{d}r,$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t r\left[\frac{1}{3}+f(r^2)\right]\mathrm{d}r}{t^2}\quad（洛必达法则）$$
$$=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{\left[\frac{1}{3}+f(t^2)\right]t}{t}=\pi\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{3}+f(t^2)\right]=\pi\left[\frac{1}{3}+f(0)\right]=\frac{\pi}{3}。$$

计算三重积分方法综述

计算三重积分有两个基本方法，一是投影法；二是截面法。

在通常情况下，如果积分区域是 Z-型柱体，则用投影法；如果不是 Z-型柱体，而是可截 Z-型区域，可以用截面法。但是有时由于受被积函数因素的影响可能用截面法更好些！见例 9.18。如果既不是 Z-型柱体，又不是可截 Z-型区域，可将积分区域分割成 Z-型柱体，或可截 Z-型区域，或者将积分区域表示为两个区域（Z-型柱体，可截 Z-型区域）的和或差。

计算三重积分，一般是将三重积分写成三次积分，再计算三个定积分，这实质是投影法，即先一后二，然后再将二重积分转化为二次积分。但这要比投影法复杂。投影法，是先一后二积分，先计算一个定积分，得到一个二重积分，然后再考虑如何计算这个二重积分，这比将三重积分一次性表示为三次积分简单得多！

题型 8　利用柱面坐标变换和球面坐标变换计算三重积分

1. 柱面坐标变换

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，M 在 xOy 面上的投影为 $P(x,y,0)$，P 点的平面极坐标为 (r,θ)，这样三个有序数组 $\{r,\theta,z\}$ 称为点 M 的**柱面坐标**，并规定 r,θ,z 的变换范围为：

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r<+\infty,\quad -\infty<z<+\infty,$$

于是有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z。$$

若 Ω 是 Z-型柱体，即 $\Omega=\{(x,y)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\mathrm{d}r\int_{z_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{z_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z。$$

其中变量 r,θ 的积分上下限是由 Ω 在 xOy 面的投影 D_{xy} 确定的。

例 9.20　计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的区域。

解　积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 4,(x,y)\in D_{xy}\}$，$\Omega$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，应用柱面坐标变换

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^4 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r(16-r^4)\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left(8r^2-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2=\frac{64}{3}\pi。$$

例 9.21　计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体。

解　依题意，积分区域 Ω 是由旋转曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=4$ 所围成的立体，Ω 在 xOy 面的投影 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 8\}$。于是应用投影法，先将三重积分转化为二重积分，再做极坐标变换，得到

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^4(x^2+y^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left\{\left[4-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right](x^2+y^2)+8-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}} r\left[\left(4-\frac{r^2}{2}\right)r^2+8-\frac{r^4}{8}\right]\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}\left(8r+4r^3-\frac{5}{8}r^5\right)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left(4r^2+r^4-\frac{5}{48}r^6\right)\Big|_0^{\sqrt{8}}=\frac{256}{3}\pi。$$

注 柱面坐标变换的实质是投影法的先一后二的积分，先计算一个定积分，得到二重积分，再对二重积分做极坐标变换。

例 9.20 应用柱面坐标变换，例 9.21 应用的是极坐标变换，本质是相同的，但是后者更容易一些。因此，在实际解题过程中，没有必要特别考虑是否应用以及怎样应用柱面变换，把三重积分化为三次积分，而是先把三重积分利用投影法转化为二重积分，再考虑应用极坐标变换计算二重积分。

2. 球面坐标变换

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，点 M 可用三个有序数组(r,φ,θ)来表示，其中 r 为原点 O 到 M 点的距离，φ 为有向线段$\overrightarrow{OM}$与 z 正向所夹的角，θ 为 M 在 xOy 投影 P，有向线段$\overrightarrow{OP}$与 x 正向所夹的角(图 9-14)，这三个有序数组(r,φ,θ) 称为点 M 的**球面坐标**，其中 r,φ,θ 的变化范围为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r<+\infty。$$

显然，点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=OP\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=OP\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi。\end{cases}$$

三重积分可化为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_?^?\mathrm{d}\theta\int_?^?\mathrm{d}\varphi\int_?^? f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r,$$

其中雅可比行列式 $J(\theta,\varphi,r)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\varphi,r)}=r^2\sin\varphi$。

如何确定积分变量 θ,φ,r 的积分上下限：

1. **θ 的积分上下限的确定**：由积分区域 Ω 在 xOy 面的投影 D_{xy} 确定，是由区域 D_{xy} 上的一点 P 和原点的连线$\overrightarrow{OP}$与 x 轴正向所成的夹角的范围确定。

2. **φ 的积分上下限的确定**：由积分区域 Ω 确定，是 Ω 上的任意一点 M 和原点的连线$\overrightarrow{OM}$与 z 轴正向所成的夹角的范围确定。

3. **r 的积分上下限的确定**：r 代表积分区域上的点到原点的距离，用穿线法来确定 r 的积分上下限。若包

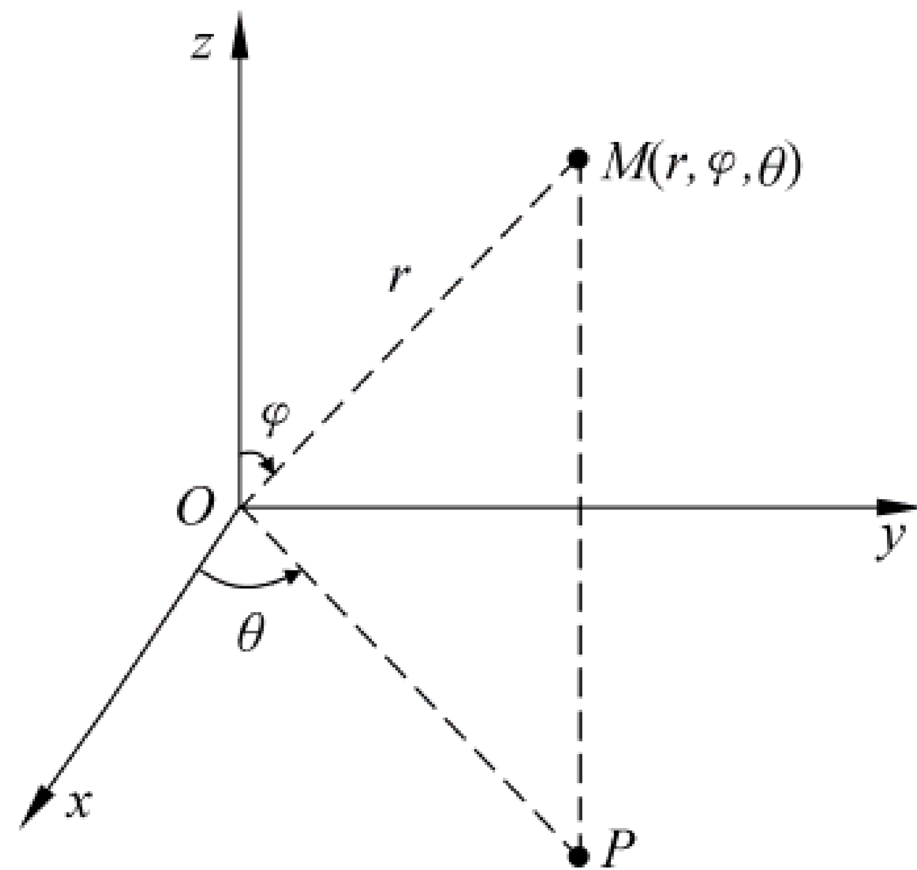


图 9-14

含原点，下限是 0，上限是积分区域"面"到原点的距离 $r(\theta,\varphi)$，即只要将

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

代入曲面中，求出 $r=r(\theta,\varphi)$ 即是上限；若不包含原点，将球面坐标代入内侧曲面和外侧曲面，得到内侧曲面距离 $r_1(\theta,\varphi)$ 就是积分的下限，外侧曲面距离 $r_2(\theta,\varphi)$ 就是积分的上限。

例 9.22 利用球面坐标变换将三重积分 $I_k=\iiint\limits_{\Omega_k}f(x,y,z)\mathrm{d}v\ (k=1,2,3,4)$ 化为累次积分：

(1) $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，如图 9-15(a)所示；

(2) $\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，如图 9-15(b)所示；

(3) $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x\leqslant0,z\leqslant0,x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，如图 9-15(c)所示；

(4) $\Omega_4=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,z\leqslant0,y\leqslant0,x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，如图 9-15(d)所示。

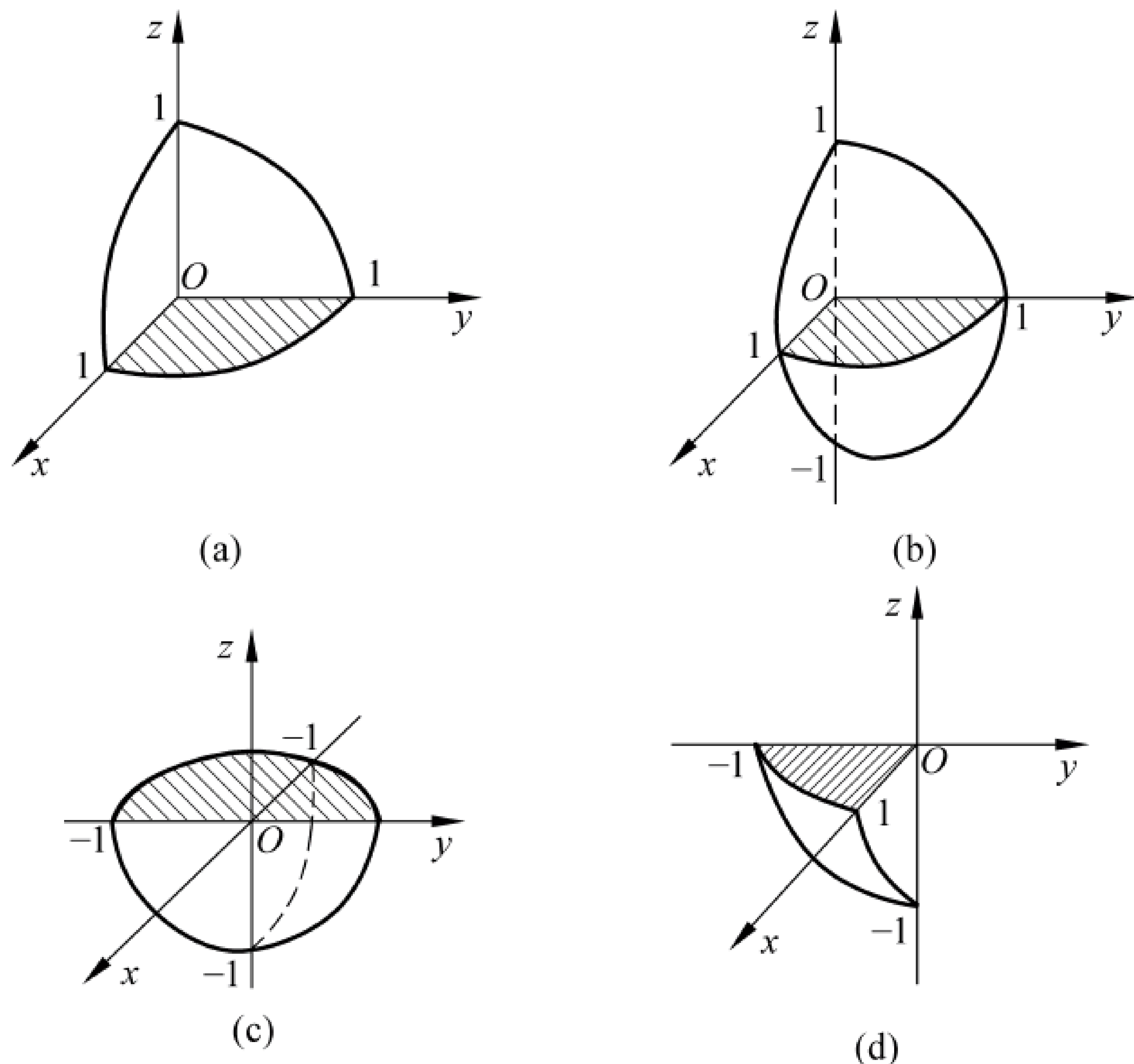


图 9-15

解 根据各自的积分区域，则有

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r;$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r;$$

$$I_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r;$$

$$I_4=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r。$$

例 9.23 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(\sin x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=$

$\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域。

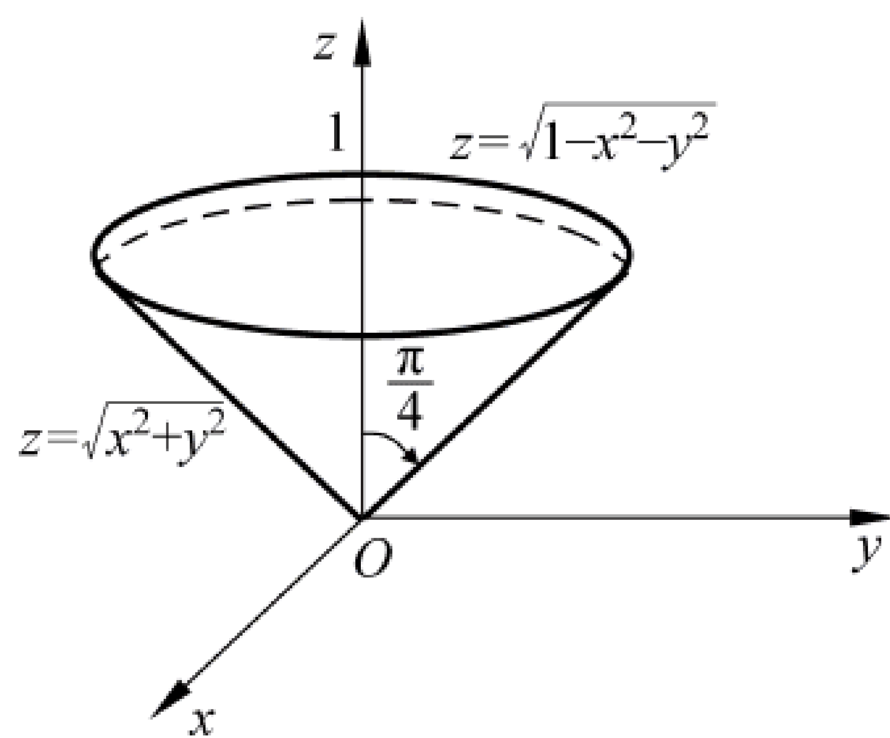


图 9-16

解 积分区域如图 9-16 所示，关于 yOz 面对称，所以

$$\iiint_{\Omega} \sin x \mathrm{d}v = 0。$$

做球面坐标变换，根据积分区域，有

$$\Omega = \left\{(\theta,\varphi,r) \middle| 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}。$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\pi。$$

例 9.24 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=4$ 上半椭球面与平面 $z=0$ 所围成的区域。

解 作广义球面坐标变换，令 $x = ra\sin\varphi\cos\theta$，$y = rb\sin\varphi\sin\theta$，$z = rc\cos\varphi$，则 $J = abcr^2\sin\varphi$，于是

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \cdot abcr^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= abc \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^2 r^2 \sqrt{4-r^2} \mathrm{d}r。$$

令 $r=2\sin x$，则 $\mathrm{d}r=2\cos x\mathrm{d}x$，于是

$$\int_0^2 r^2 \sqrt{4-r^2} \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 x \cdot 2\cos x \cdot 2\cos x \mathrm{d}x$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x)\mathrm{d}x = 16\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi。$$

所以 $\iiint_{\Omega} \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \pi = 2abc\pi^2$。

利用坐标变换计算三重积分方法综述

利用坐标变换计算三重积分常用的两个方法：柱面坐标变换和球面坐标变换。根据上面论述，由于计算三重积分是没有必要刻意考虑是否应用柱面坐标变换，因此在这个意义上说：计算三重积分的坐标变换就是球面坐标变换，或广义球面坐标变换，如例 9.24，例 9.18，练习题 9-2，2(3)等。

对被积函数含有“$x^2+y^2+z^2$”，或积分区域是球或球的一部分的三重积分，最适宜用球面坐标变换，对含有“$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$”，或积分区域是椭球或椭球的一部分，最适宜用广义球面坐标变换。

球面坐标变换是计算三重积分最重要的一个方法，是其他方法不能取代的。

对含有重积分的极限，通常是将重积分化为累次积分(或通过坐标变换化为累次积分)，

根据累次积分的性质，最后化为变限积分函数，如例 9.19，再用洛必达法则，变为初等函数或抽象函数的极限。

练习题 9-2

1. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(xy+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $x+2y+z=1$ 与三个坐标面所围成的立体；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $z=xy,y=x,z=0,x=1$ 所围成的立体；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的立体；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；

(6) $\iiint\limits_{\Omega}(lx+my+nz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$。

2. 用适当的坐标变换计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围成的立体；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=0$ 所围成的立体；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的立体；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围成的立体；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是上半椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$；

(6) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Ω 是区域：$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$。

3. 计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　(4) $z=x^2+y^2,x^2+y^2=x,x^2+y^2=2x$ 及 $z=0$。

4. 设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，f 可导，

(1) 求 $F'(t)$；　(2) 已知 $f(0)=0,f'(0)=1$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^4}$。

5. 设 $f(u)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω：$0\leqslant z\leqslant h, x^2+y^2\leqslant t^2$ 围成，求：(1) $F'(t)$；(2) 极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$。



*9.3 重积分的应用

定义5 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，物体所占的空间区域为 Ω，密度为 $\rho(x,y,z)$，则

(1) **质量** 物体的质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}y$。

(2) **质心** 物体的质心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{M}\left(\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v\right)。$$

(3) **转动惯量** 转动惯量等于质点到转动轴的距离的平方与密度函数积的三重积分。所以物体关于 x 轴，y 轴，z 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v;\quad I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v;$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v;\quad I_o=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v。$$

(4) **引力** 设 G 是引力常数，物体对质量为 m 的质点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的引力 (F_x,F_y,F_z) 为

$$F_x=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v;$$

$$F_y=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v;$$

$$F_z=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v。$$

注 物体的**质心**，又称物体的**重心**，当密度为常量时，又是空间区域 Ω 的**形心**。

题型9 计算物体的质量、质心、转动惯量和引力

例9.25 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$ 中任意一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比，求此物体的质心。

解 由于所给球体的质量分布关于 z 轴对称，所以质心位于 z 轴上，密度是

$$\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

其中 k 是比例常数，于是质心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\iiint\limits_{\Omega}kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big/\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

由于

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{5}\pi a^4,$$

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{64}{35}\pi a^5,$$

所以 $\bar{z}=\frac{8}{7}a$。此物体的质心坐标为 $\left(0,0,\frac{8}{7}a\right)$。

例 9.26 求底半径为 R,高为 l,密度为 ρ 的均匀圆柱体对轴线的转动惯量。

解 取底心为原点,轴线为 z 轴,于是所给的圆柱体是由柱面 $x^2+y^2=R^2$、平面 $z=0$ 和 $z=l$ 围成,所以它对 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}V=\rho\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^l(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\rho l\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho l\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\rho lR^4。$$

例 9.27 求半径为 R 均匀球体对距离球心为 $2R$ 的质量为 1 的质点 A 的引力。

解 取球心为原点,OA 为 z 轴,于是所给的球体方程为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,质点 A 位于 z 上,坐标为 $(0,0,2R)$,由对称性可知,$F_x=F_y=0$。设球体的密度为 ρ,则有

$$F_z=G\rho\iiint_{\Omega}\frac{z-2R}{[x^2+y^2+(z-2R)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=G\rho\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{z-2R}{[x^2+y^2+(z-2R)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r(z-2R)}{[r^2+(z-2R)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi G\rho\int_{-R}^{R}\left(-1-\frac{z-2R}{\sqrt{5R^2-4Rz}}\right)\mathrm{d}z=2\pi G\rho\left(-2R-2R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{5R^2-4Rz}}\mathrm{d}z\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\pi G\rho R。$$

练习题 9-3

1. 计算半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的质量,密度与到球心的距离的平方成正比,且在球面处为 1。

2. 设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球表面的一个定点,球体任意一点的密度与该点到 P_0 的距离平方成正比,求球体的质心坐标。

3. 设物体是由上半球 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成,密度为 $\mu=1$,求此物体绕对称轴的转动惯量。

4. 求均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant h$ 对于 $(0,0,c)(c>h)$ 处单位质点的引力。

9.4 重积分考研真题

一、重积分考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里,关于重积分考研数一真题共出了 18 道题,题型分布在:

1. 比较积分值大小:共计 2 个题,分布在 2009 年和 2010 年。

2. 交换累次积分次序、两类二重(累次)积分的坐标转换:共计 3 个题,分布在 2006 年,

2014 年和 2015 年。

3. 计算重积分和累次积分：共计 7 个题，分布在 2005 年，2006 年，2009 年，2011 年，2013 年，2015 年和 2016 年。

4. 计算曲面面积、物体(空间体)体积：有 1 个题，分布在 2009 年。

5. 计算物体质心，形心坐标：共计 3 个题，分布在 2010 年，2013 年和 2019 年。

6. 讨论用重积分表示的函数的性质：共计 2 个题，分布在 2003 年和 2004 年。

1 重积分考研数一真题题型分析

1. 比较积分值大小：2009 年考了利用二重积分性质比较积分值大小；2010 年考了二重积分的定义。

2. 交换积分次序、两类二重积分的坐标转换：2004 年考了二重积分转化为定积分(变限积分函数)；2006 年考了两类累次积分的坐标转换；2014 年考了交换积分次序和两类累次积分的坐标转换；2015 年考了将二重积分转化为极坐标系下的累次积分。

3. 计算重积分和累次积分：2005 年考了整数函数的二重积分；2006 年考了二重积分性质和用极坐标变换计算二重积分；2009 年考了用球面坐标变换计算三重积分；2011 年考了含有偏导函数的二重积分；2013 年考了交换积分次序，计算累次积分；2015 年考了计算简单的三重积分；2016 年考了计算二重积分，积分区域是 θ-型区域。

4. 计算曲面面积、物体(空间体)体积：2009 年考了求旋转曲面方程和旋转体的体积。

5. 计算物体质心，形心坐标：2010 年和 2019 年考了形心坐标；2013 年考了旋转曲面方程及其形心坐标。

6. 讨论用重积分表示的函数的性质：2003 年考了用三重积分和二重积分表示函数的单调性，以及证明不等式；2004 年考了求用累次积分表示的函数在一点的导数。

2 重积分考研数一真题

1. (2003，八(12 分))设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$。

(i) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性； (ii) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$。

考点与解法：讨论用重积分给出的函数的单调性，并证明函数不等式。(i)利用坐标变换(极坐标变化和球面坐标变化)，化重积分为累次积分，最后化为变限积分函数，求导。(ii)利用单调性证明不等式。

2. (2004，二(10)(4 分))设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$； (B) $f(2)$； (C) $-f(2)$； (D) 0。

考点与解法：求用累次积分给出的函数在一点的导数。交换积分次序，化为变限积分函数，求导函数，再求导函数在 $x=2$ 点的函数值。

3. (2005，三(15)(11 分))设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

考点与解法：计算非初等函数的二重积分。将积分区域 D 分割为 $D_1: x^2+y^2<1$ 和 $D_2: 1\leqslant x^2+y^2<\sqrt{2}$，把二重积分表示为在这两个区域上积分的和。

4．(2006，二(8)(4 分))设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$。

考点与解法：极坐标系下的累次积分转化为直角坐标系下的累次积分。确定积分区域，表示为累次积分。

5．(2006，三(16)(10 分))设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法：计算二重积分。利用线性性质，将二重积分表示为两个二重积分的和，一个利用二重积分的奇偶性和对称性，积分值为 0，另一个利用极坐标变换。

6．(2009，一(2)(4 分))正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$ 如图 9-17 所示，$I_k=\iint_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4} I_k=$

(A) I_1；　　(B) I_2；

(C) I_3；　　(D) I_4。

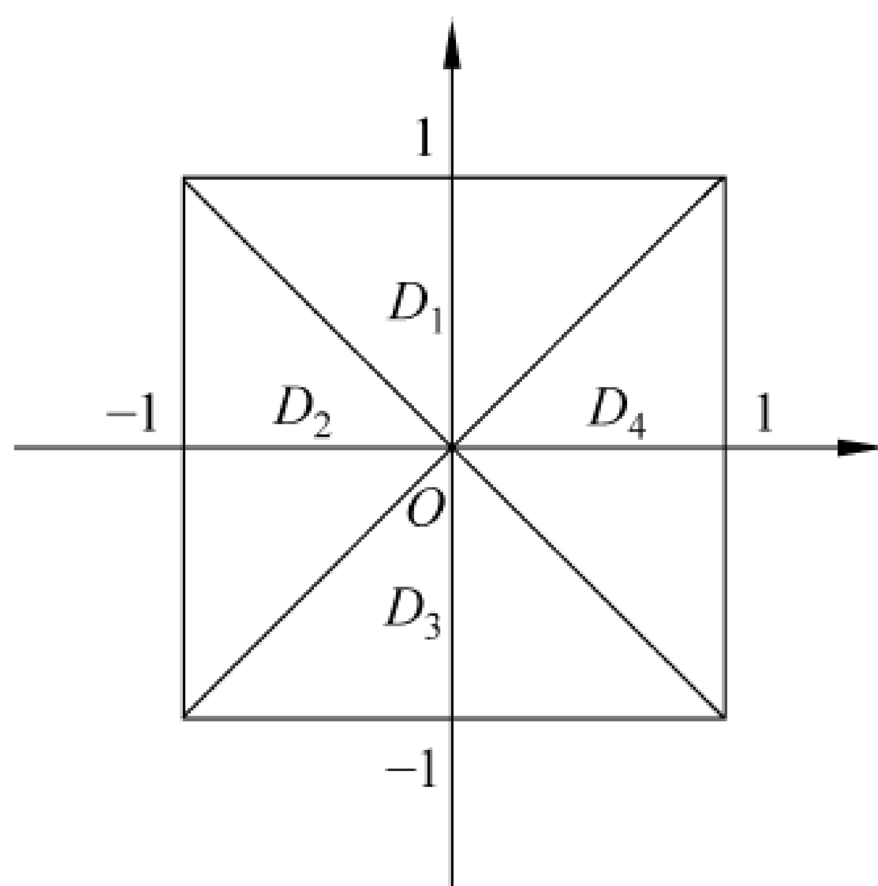


图 9-17

考点与解法：比较积分值大小。利用二重积分性质和几何意义。

7．(2009，二(12)(4 分))设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，求 $\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

考点与解法：计算三重积分。利用球面坐标变换。

8．(2009，三(17)(11 分))椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

(i) 求 S_1 和 S_2 方程；　　(ii) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

考点与解法：求旋转曲面方程，计算旋转体的体积。(i)求出切线方程，得到两个旋转曲面方程；(ii)用旋转体的体积公式以及三重积分计算立体体积。

9．(2010，一(4)(4 分)) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$；　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$；　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$。

考点与解法：二重积分和累次积分定义。极限表示为二重积分，再将二重积分转化为

累次积分。

10.（2010，二(12)(4 分)）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，求 Ω 的形心的竖坐标。

考点与解法：求形心坐标。利用形心的竖坐标的公式，计算两个三重积分。

11.（2011，三(19)(11 分)）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法：计算抽象函数的二重积分。化二重积分为累次积分，利用分部积分法计算。

12.（2013，三(15)(10 分)）计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$。

考点与解法：计算累次积分。交换积分次序，计算累次积分。

13.（2013，三(19)(10 分)）设直线 L 过点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω。

(i) 求曲面 Σ 方程；　　(ii) 求 Ω 的形心坐标。

考点与解法：求旋转曲面方程，计算形心坐标。(i)建立直线参数方程，根据直线参数方程建立绕 z 轴旋转曲面方程。(ii)利用形心的坐标的公式，计算两个三重积分。

14.（2014，一(3)(4 分)）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

考点与解法：交换累次积分次序，转化为极坐标系下的累次积分。确定积分区域，交换积分次序，将直角坐标系转化为极坐标系下的累次积分。

15.（2015，一(4)(4 分)）设 D 为第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 连续，则

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$。

考点与解法：将二重积分表示为极坐标系下的累次积分。画出积分区域，表示为极坐标系下的累次积分。

16.（2015，二(12)(4 分)）设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面平面围成的空间区域，计算 $\iiint\limits_\Omega(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

考点与解法：计算三重积分。利用投影法，计算三重积分。

17. (2016，三(15)(10 分))已知 $D=\left\{(r,\theta)\mid 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$。

考点与解法：计算二重积分。利用极坐标变换。

18. (2019，三(19)(10 分))Ω 是锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标。

考点与解法：计算形心坐标。利用形心坐标公式，计算 4 个三重积分。

二、二重积分考研数三真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于二重积分考研数三真题共出了 26 道题，题型分布在：

1. 计算二重积分：共计 16 个题，分布在 2003 年(2 题)，2004 年，2005 年，2006 年，2007 年，2008 年(2 题)，2009 年，2010 年，2012 年，2013 年，2014 年，2015 年，2017 年和 2018 年。

2. 交换积分次序、两类二重(累次)积分的坐标转换：共计 3 个题，分布在 2007 年，2012 年和 2015 年。

3. 计算累次积分：共计 2 个题，分布在 2014 年和 2019 年。

4. 比较积分值大小：共计 3 个题，分布 2005 年，2013 年和 2016 年。

5. 讨论用重积分给出的函数及其性质：共计 2 个题，分布在 2008 年和 2011 年。

2.1 二重积分考研数三真题题型分析

1. 计算二重积分：2003 年，2005 年，2007 年和 2008 年考了非初等函数的二重积分；2003 年，2008 年和 2014 年考了利用极坐标变换计算二重积分；2004 年考了利用积分区域的可加性，将积分表示为两个积分的差，再利用极坐标变换计算二重积分；2009 年考了利用一般的坐标变换计算二重积分；2006 年，2013 年，2015 年和 2019 年考了计算一般的二重积分；2012 年和 2017 年考了计算无界区域的二重积分。

2. 交换积分次序、两类累次积分的坐标转换：2007 年考了交换累次积分的积分次序；2008 年考了将二重积分转化为极坐标下累次积分；2012 年考了极坐标下的累次积分转化为直角坐标系下的累次积分；2015 年考了将二重积分转化为极坐标系下的累次积分和直角坐标系下的累次积分。

3. 计算累次积分：2014 年和 2019 年考了交换累次积分次序，计算累次积分。

4. 比较积分值大小：2005 年考了利用被积函数的大小关系，确定积分值的大小关系；2013 年考了利用积分定义和性质判断定积分值的符号；2016 年考了在不同积分区域上比较积分值的大小。

5. 讨论用重积分给出的函数及其性质：2008 年考了求用重积分给出的二元函数的偏导数；2011 年考了用重积分的等式建立微分方程，求函数表达式。

2.2 二重积分考研数三真题

1. (2003，一(3)(4 分))设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$ 而 D 表示全平面，计算

$\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

考点与解法：计算二重积分。确定被积函数不等于0的积分区域：

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y-x\leqslant 1\}。$$

2. (2003，三(8分))计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$。

考点与解法：计算二重积分。利用极坐标变换，变量代换和分部积分。

3. (2004，三(16)(8分))求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2\geqslant 1$ 所围成的平面区域。

考点与解法：计算二重积分。利用积分区域的可加性，将积分表示为在两个圆上积分的差，利用极坐标变换。

4. (2005，二(8)(4分))设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则

(A) $I_3>I_2>I_1$；　(B) $I_1>I_2>I_3$；　(C) $I_2>I_1>I_3$；　(D) $I_3>I_1>I_2$。

考点与解法：比较二重积分大小。利用余弦函数在第一象限内是减函数性质，比较被积函数的大小。

5. (2005，三(17)(9分))计算 $2\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x,y\leqslant 1\}$。

考点与解法：计算非初等函数的二重积分。用曲线 $x^2+y^2=1$ 将积分区域 D 分割成两个区域。

6. (2006，三(16)(7分))计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=y,y=1,x=0$ 所围成的平面区域。

考点与解法：计算二重积分。将二重积分转化为先对 x 后对 y 积分的二次积分。

7. (2007，一(4)(4分))设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$。

考点与解法：交换积分次序。确定积分区域，转化为另一个次序的累次积分。

8. (2007，三(18)(11分))设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$ 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid|x|+|y|\leqslant 2\}$。

考点与解法：计算非初等函数的二重积分。依照二元函数的分段，将积分区域分成两

个区域,二重积分表示为在这两个区域积分的和。

9.(2008,一(4)(4分))设函数 $f(x)$ 连续,若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图阴影部分如图 9-18 所示,则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$

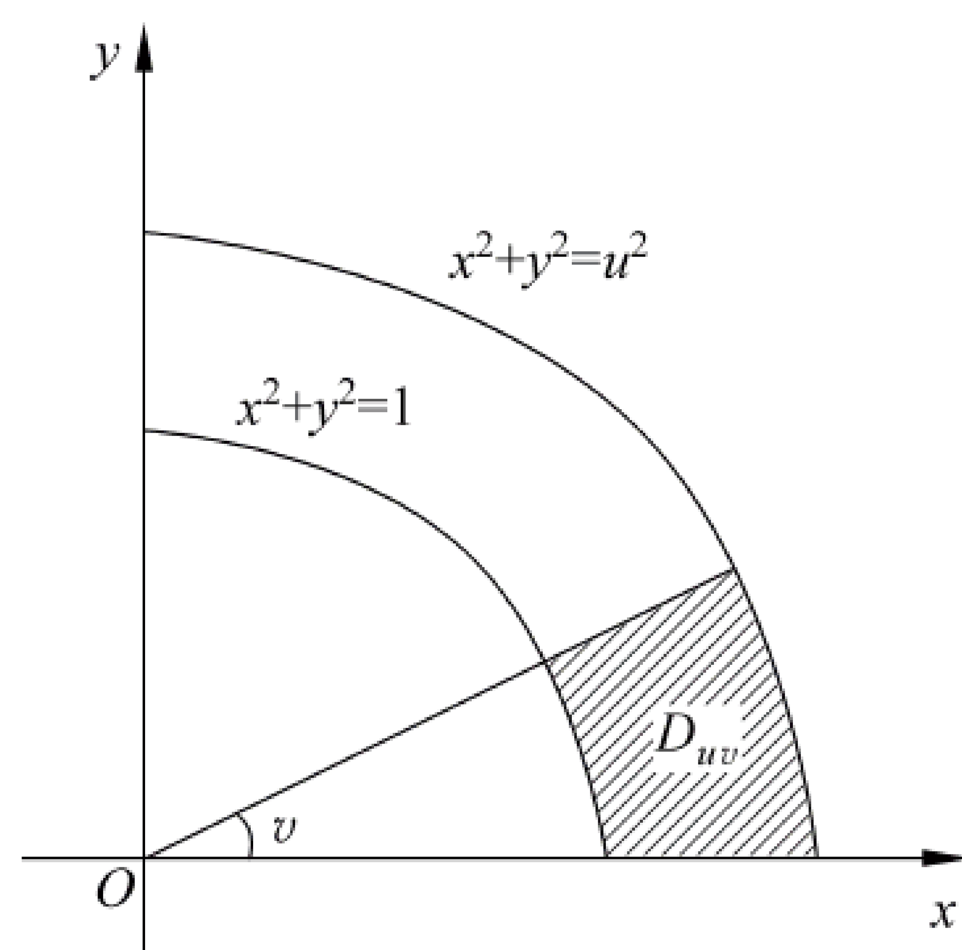


图 9-18

(A) $vf(u^2)$; (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$;

(C) $vf(u)$; (D) $\frac{v}{u}f(u)$。

考点与解法:求变限积分函数的导数。利用极坐标变换,化二重积分为累次积分,最后为变限积分函数。

10.(2008,二(11)(4分))计算 $\iint\limits_{D}\{x^2-y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$。

考点与解法:计算二重积分。利用极坐标变换。

11.(2008,三(17)(11分))计算 $\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 2\}$。

考点与解法:计算非初等函数的二重积分。利用 $xy=1$ 将积分区域分割成两个区域,将积分表示为在这两个区域积分的和。

12.(2009,三(17)(10分))计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中

$$D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}。$$

考点与解法:计算二重积分。利用一般的坐标变换或坐标平移。

13.(2010,三(16)(10分))计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

考点与解法:计算二重积分。利用积分区域关于 x 轴对称,被积函数表示为四个函数的和,其中两个二重积分为 0,另外两个二重积分表示为累次积分,并计算。

14.(2011,三(19)(10分))设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$区间上具有连续导数,$f(0)=1$ 且满足 $\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$,求 $f(x)$ 的表达式。

考点与解法:求函数表达式。二重积分表示为累次积分,表示为变限积分函数,建立微分方程,求解方程。

15.(2012,一(3)(4分))设函数 $f(x)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$; (B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$; (D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$。

考点与解法：极坐标系下的累次积分转化为直角坐标下的累次积分。确定积分区域，将极坐标系下的二次积分表示为直角坐标下的累次积分。

16.（2012，三(16)(10 分)）计算二重积分$\iint\limits_D e^x y\,dx\,dy$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域。

考点与解法：计算无界区域的二重积分。将二重积分转化为先对 y 积分的累次积分。

17.（2013，一(3)(4 分)）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\,dx\,dy\,(k=1,2,3,4)$，则

(A) $I_1>0$；　(B) $I_2>0$；　(C) $I_3>0$；　(D) $I_4>0$。

考点与解法：判断积分值正负。利用二重积分性质，被积函数大于 0，积分值大于 0，以及轮换对称性。

18.（2013，三(17)(10 分)）设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$。

考点与解法：计算二重积分。化二重积分为累次积分。

19.（2014，二(12)(4 分)）计算二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1\left(\dfrac{e^{x^2}}{x}+e^{y^2}\right)dx$。

考点与解法：计算累次积分。将其表示为两个二重积分的和，后一个保持原来积分次序，前一个交换积分次序。

20.（2014，三(16)(10 分)）设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\,dx\,dy$。

考点与解法：计算二重积分。利用轮换对称性，化简二重积分，然后用极坐标变换。

21.（2015，一(3)(4 分)）设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=$ ________。

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$；

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$；

(C) $2\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\,dy$；　(D) $2\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,dy$。

考点与解法：把二重积分表示为累次积分（直角坐标系和极坐标系）。将积分区域 D 分割为两个 θ-型区域，再表示为极坐标下的累次积分。

22.（2015，三(17)(10 分)）计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\,dx\,dy$，其中

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}。$$

考点与解法：计算二重积分。将二重积分转化为累次积分。

23. (2016,一(3)(4分)) $T_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(i=1,2,3)$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则

(A) $T_1<T_2<T_3$；　　(B) $T_3<T_1<T_2$；

(C) $T_2<T_3<T_1$；　　(D) $T_2<T_1<T_3$。

考点与解法：比较二重积分值的大小。根据积分区域和二重积分的几何意义和性质。

24. (2017,三(16)(10分)) 计算积分$\iint\limits_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是第一象限中以曲线$y=\sqrt{x}$与$x$轴为边界的无界区域。

考点与解法：计算无界区域的二重积分。化二重积分为累次积分(先对y后对x的积分)。

25. (2018,三(16)(10分)) 计算二重积分$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由曲线$y=\sqrt{3(1-x^2)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及$y$轴围成的区域。

考点与解法：计算二重积分。化二重积分为累次积分(先对y后对x的积分)。

26. (2019,二(11)(4分))已知$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，求$\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$。

考点与解法：计算累次积分。交换积分次序，计算累次积分。

9.5 本章练习题答案与提示

练习题 9-1 答案与提示

1. (1) 0。提示：积分区域既关于x轴对称，又关于y轴对称，且$\iint\limits_D(x+y)f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D xf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D yf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，两个积分值都是0。

(2) 2。提示：$\iint\limits_D(2+x\cos xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D x\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\overline{D}=2$，积分区域关于$y$轴对称，所以第二个积分等于零。

(3) 2。提示：$\iint\limits_D(1-xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{D}+0=2$。第二个积分可以用$y=-x$将区域$D$分成两个区域$D_1$和$D_2$，分别关于$x$轴对称和$y$轴对称，而

$$\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

(4) 0。提示：$\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0$。

2. (1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x f(x,y)\mathrm{d}y$。　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$。

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$。　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$。

3. (1) $\frac{1}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}-1)$。提示：先交换积分次序，再计算累次积分

$$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})。$$

(2) 2。提示：$\int_\pi^{2\pi}dy\int_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\pi dx\int_\pi^{x+\pi}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^\pi \sin x dx=2$。

(3) $\frac{1}{6}$。提示：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt[3]{y}}^1\sqrt{1-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^3}\sqrt{1-x^4}dy=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}dx=\frac{1}{6}$。

(4) $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$。提示：$\int_0^1 dy\int_y^1\sin x^2dx=\int_0^1 dx\int_0^x\sin x^2dy=\int_0^1 x\sin x^2dx$。

4. (1) 1。提示：$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^2 xydy=\int_0^1 xdx\cdot\int_0^2 ydy=1$。

(2) $\frac{8}{3}$。提示：$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x+y)dy=\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)dx=\frac{8}{3}$。

(3) $\frac{1}{5}$。提示：$\iint\limits_D ydxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}ydx=\int_0^1\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{1}{5}$。

(4) 4π。提示：$\iint\limits_D(x\cos y+y)dxdy=\iint\limits_D x\cos ydxdy+\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D ydxdy$，

$$\iint\limits_D ydxdy=\int_{-2}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}ydy=\frac{1}{2}\int_{-2}^2(4-x^2)dx=\int_0^2(4-x^2)dx=\frac{16}{3}。$$

5. (1) $\frac{11}{15}$。提示：用曲线 $x=y^2$ 将区域 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，于是有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D|x-y^2|dxdy&=\iint\limits_{D_1}|x-y^2|dxdy+\iint\limits_{D_2}|x-y^2|dxdy\\&=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)dxdy\\&=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_{-1}^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy=\frac{11}{15}。\end{aligned}$$

(2) 6。提示：用三条直线 $x+y=1$，$x+y=2$，$x+y=3$ 将区域 D 分为四个区域 D_1,D_2,D_3,D_4 区域，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D[x+y]dxdy&=\iint\limits_{D_1}[x+y]dxdy+\iint\limits_{D_2}[x+y]dxdy+\iint\limits_{D_3}[x+y]dxdy+\iint\limits_{D_4}[x+y]dxdy\\&=\iint\limits_{D_1}0dxdy+\iint\limits_{D_2}1dxdy+\iint\limits_{D_3}2dxdy+\iint\limits_{D_4}3dxdy=\bar{D}_2+\bar{D}_2+\bar{D}_4=6。\end{aligned}$$

(3) $\frac{5\pi}{2}$。提示：用 $x=y$ 将区域 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，于是有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sin x\sin y\max\{x,y\}dxdy&=\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin ydxdy+\iint\limits_{D_2}y\sin x\sin ydxdy\\&=\int_0^\pi dx\int_0^x x\sin x\sin ydy+\int_0^\pi dy\int_0^y y\sin x\sin ydx=2\int_0^\pi x\sin x(1-\cos x)dx\\&=2\left(\int_0^\pi x\sin xdx-\int_0^\pi x\sin x\cos xdx\right)\\&=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin xdx+\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi=2\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi。\end{aligned}$$

(4) $\frac{4}{3}$。提示：被积函数关于 x 和 y 都是偶函数，积分区域是菱形，关于坐标轴对称，利用奇偶性和对称性，$\iint\limits_D(|x|+|y|)dxdy=4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)dxdy$，其中 D_1 是菱形在第一象限部分，于是$\iint\limits_D(|x|+|y|)dxdy=$

$4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=\dfrac{4}{3}$。

6. $\dfrac{\pi}{2}$。提示：利用轮换对称性

$$\iint_D \frac{1+2x^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D \frac{1+2y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{1+2x^2}{1+x^2+y^2}+\frac{1+2y^2}{1+x^2+y^2}\right)dxdy=\frac{\pi}{2}。$$

7. 6π。提示：用二重求体积，积分区域是 $z=x^2+2y^2$ 和 $z=6-2x^2-y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影，D：$x^2+y^2=2$，被积函数是顶面与底面的差 $6-3x^2-3y^2$。曲面围成的区域的体积 $V=\iint_D(6-3x^2-3y^2)dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)rdr=6\pi$。

8. $\dfrac{17}{6}$。提示：用二重积分求体积，积分区域 $x=0,y=0,x+y=1$，被积函数为 $z=6-x^2-y^2$。曲面围成区域的体积

$$V=\iint_D(6-x^2-y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)dy=\int_0^1\left(\frac{17}{3}-5x-2x^2+\frac{4}{3}x^3\right)dx=\frac{17}{6}。$$

9. $\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$。提示：代入，累次积分，交换累次积分的积分次序

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right)。$$

10. 提示：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{1}{f(y)}dy=\iint_D\dfrac{f(x)}{f(y)}dxdy$，由于积分区域 D 具有轮换对称性，所以有 $\iint_D\dfrac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint_D\dfrac{f(y)}{f(x)}dxdy$，于是

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy\geqslant\iint_D dxdy=(b-a)^2。$$

11. 2π。令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r)\cdot rdr=2\pi\int_0^t rf(r)dr$，$F'(t)=2\pi tf(t)$，$F''(0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{F'(t)-F'(0)}{t}=2\pi\lim\limits_{t\to0}f(t)=2\pi f(0)=2\pi$。

12. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}(e^{\pi x^4}-1)$。提示：$f(t)=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t r^2f(r)\cdot rdr+t^4=4\pi\int_0^t r^3f(r)dr+t^4$，求导 $f'(t)=4\pi t^3f(t)+4t^3$，整理得 $f'(t)-4\pi t^3f(t)=4t^3$，一阶线性方程有公式解，通解为 $f(t)=Ce^{\pi t^4}-\dfrac{1}{\pi}$，由 $f(0)=0$ 解得 $C=\dfrac{1}{\pi}$。

练习题 9-2 答案与提示

1. (1) 14。提示：化累次积分，

$$\iiint_\Omega(xy+z^2)dxdydz=\int_{-2}^5dx\int_{-3}^3dy\int_0^1(xy+z^2)dz=\int_{-2}^5dx\int_{-3}^3\left(xy+\frac{1}{3}\right)dy=\int_{-2}^5 2dx=14。$$

(2) $\dfrac{1}{48}$。提示：化累次积分 $\iiint_\Omega xdxdydz=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}dy\int_0^{1-x-2y}xdz=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}x(1-x-2y)dy=\int_0^1\left[\dfrac{1}{2}(1-x)x(1-x)-\dfrac{1}{4}x(1-x)^2\right]dx=\dfrac{1}{48}$。

(3) $\dfrac{1}{364}$。提示：$\iiint_\Omega xy^2z^3dxdydz=\int_0^1dx\int_0^xdy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\dfrac{1}{4}\int_0^1dx\int_0^x x^5y^6dy=\dfrac{1}{28}\int_0^1x^{12}dx=\dfrac{1}{364}$。

(4) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$。提示：

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}。$$

(5) 2π。提示：利用截面法，即先二重积分，后定积分

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\iint\limits_{z^2+y^2\leqslant 1-x^2}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{|x|}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^1\mathrm{e}^x(1-x^2)\mathrm{d}x。$$

(6) $\frac{4}{3}n\pi$。提示：根据奇偶性与对称性，$\iiint\limits_{\Omega}lx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}my\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，且

$$\iiint\limits_{\Omega}nz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=n\int_0^2z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2nz(2z-z^2)\mathrm{d}z。$$

2. (1) $\frac{\pi}{6}$。提示：用投影法，转化为二重积分，然后再做极坐标变换

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}(1-x^2+y^2)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1(r^3-r^5)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}。$$

(2) $\frac{32}{3}\pi$。提示：做球面坐标变换，$x=r\cos\theta\sin\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\varphi$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{32}{3}\pi。$$

(3) πabc。提示：做广义球面坐标变换，$x=ar\cos\theta\sin\varphi$，$y=br\sin\theta\sin\varphi$，$z=cr\cos\varphi$，则$J=abcr^2\sin\varphi$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\pi abc。$$

(4) $\frac{124}{15}\pi$。提示：做球面坐标变换，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^2r^4\mathrm{d}r=\frac{124}{15}\pi。$$

(5) $\frac{\pi}{2}abc^2$。提示：此题可用三种方法：投影法、广义球面坐标变换、截面法。

$$\iiint\limits_{\Omega}|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r\cos\varphi\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}abc^2。$$

(6) $(\sqrt{2}-1)\pi$。提示：做球面坐标变换，有

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sec\varphi}r\sin\varphi\mathrm{d}r=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=(\sqrt{2}-1)\pi。$$

3. (1) $\frac{32}{3}\pi$。提示：先转换二重积分，再做极坐标变换，(当然可以使用柱面变换)

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^2(6-r^2-r)r\mathrm{d}r=\frac{32}{3}\pi。$$

(2) $\frac{\pi}{6}$。提示：做柱面变换 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^{r}r\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$。

(3) $\frac{4}{3}\pi abc$。提示：做广义球面坐标变换

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc。$$

(4) $\frac{45}{32}\pi$。提示：设积分区域为 D,D_1 是大圆，D_2 是小圆，于是

$$V=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r。$$

4. 提示：做球面坐标变换

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r，则$$

(1) $F'(t)=4\pi f(t)t^2$；(2) $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^4}=\pi\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=f'(0)\pi$。

5. $F'(t)=2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2-f(t^2)\right]$；$\frac{1}{3}\pi h^3-\pi hf(0)$。提示：化三次积分

$$F(t)=\iiint_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^h[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\left[\frac{1}{3}h^3+hf(r^2)\right]r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t\left[\frac{1}{3}h^3+hf(r^2)\right]r\mathrm{d}r。$$

所以 $F'(t)=2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2-f(t^2)\right]$。

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t\left[\frac{1}{3}h^3+hf(r^2)\right]r\mathrm{d}r}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi ht\left[\frac{1}{3}h^2-f(t^2)\right]}{2t}=\frac{1}{3}\pi h^3-\pi hf(0)。$$

练习题 9-3 答案与提示

1. $\frac{4}{5}\pi(\sqrt{2}-1)$。提示：密度函数 $u(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$，球面 $x^2+y^2+z^2=2$，得 $k=\frac{1}{2}$，则 $u(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。质量

$$m=\iiint_{\Omega}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi(\sqrt{2}-1)。$$

2. $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$。提示：将 P_0 点置于原点，则球面方程是 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$，密度为 $u(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$，设质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由质心坐标的对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$。

$$\iiint_{\Omega}kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi kR^6，\quad\iiint_{\Omega}k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{32}{15}\pi kR^5，$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega}kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\frac{5}{4}R。$$

3. $\frac{11}{30}\pi a^5$。提示：

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{11}{30}\pi a^5。$$

考研真题答案

数一真题答案：1. $t\in(0,+\infty)$ 内，$F(t)$ 严格单调增加；2. B；3. $\frac{3}{8}$；4. C；5. $\frac{\pi}{2}\ln2$；6. A；7. $\frac{4}{15}\pi$；

8. 椭球面 S_1 方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$；圆锥面 S_2 的方程：$(x-4)^2-4y^2-4z^2=0$；$V=\pi$；9. D；

10. $\frac{2}{3}$；11. a；12. $-4\ln 2+8-2\pi$；13. $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$，$\left(0,0,\frac{7}{5}\right)$；14. D；15. B；

16. $\frac{1}{4}$；17. $5\pi+\frac{32}{3}$；18. $\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$。

数三真题答案：1. a^2；2. $\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$；3. $\frac{16}{9}(3\pi-2)$；4. A；5. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$；6. $\frac{2}{9}$；7. B；

8. $\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$；9. A；10. $\frac{\pi}{4}$；11. $\frac{19}{4}+\ln 2$；12. $-\frac{8}{3}$；13. $\frac{14}{15}$；14. $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$；

15. B；16. $\frac{1}{2}$；17. B；18. $138\frac{2}{3}$；19. $\frac{1}{2}(e-1)$；20. $-\frac{4}{3}$；21. B；22. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$；23. B；

24. $\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；25. $\frac{\sqrt{3}}{32}(\pi-2)$；26. $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$。

* 第 10 章

曲线积分与曲面积分

基本概念

1. 第一类曲线积分、第二类曲线积分；
2. 第一类曲面积分、第二类曲面积分；
3. 曲线积分与路径无关；
4. 向量场的通量与散度、环流量与旋度。

基本结论

1. 第一类曲线积分的性质；
2. 第二类曲线积分的性质；
3. 两类曲线积分的关系；
4. 格林公式、面积公式；
5. 曲线积分与路径无关的等价条件；
6. 第一类曲面积分性质；
7. 第二类曲面积分性质；
8. 两类曲面积分的关系；
9. 斯托克斯公式；
10. 高斯公式。

基本方法

1. 计算第一类曲线积分；
2. 计算第二类曲线积分；
3. 计算与路径无关的平面曲线积分；
4. 曲线积分的等式与不等式的证明；
5. 计算第一类曲面积分；
6. 计算第二类曲面积分；
7. 计算通量、散度、环流量和旋度；
8. 计算曲线和曲面的质量、质心、形心、转动惯量和引力。

10.1　曲线积分

一、基本概念

定义 1　第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)

(1) 平面曲线 $L(AB)$ 的积分：$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$；

(2) 空间曲线 $L(AB)$ 的积分：$\int_{L(AB)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$，

其中 $\lambda(T)$ 表示分割曲线 $L(AB)$ 的分法 T 的细度，即 n 段曲线弧长的最大值，(ξ_k,η_k) 或 (ξ_k,η_k,ζ_k) 是第 k 段弧上的任意一点，Δs_k表示第 k 段曲线的弧长。

第一类曲线积分的物理意义：物质曲线的质量。

若被积函数 $f(x,y)$ 或 $f(x,y,z)$ 表示曲线的线密度，则第一类曲线积分就是物质曲线 L 的质量，简称**物质曲线的质量**。

定义 2　第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)

(1) 平面曲线 $L(AB)$ 的积分：

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]；$$

(2) 空间曲线 $L(AB)$ 的积分：

$$\int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k],$$

其中 $\lambda(T)$ 表示分割曲线 $L(AB)$ 的分法 T 的细度，即 n 段曲线弧长的最大值，(ξ_k,η_k) 或 (ξ_k,η_k,ζ_k) 是第 k 段弧上的任意一点。

第二类曲线积分的物理意义：变力做功。

若被积函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 或 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上的分量，则第二类曲线积分就是变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$或 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 沿曲线 L 所做的功，简称**变力做功**。

二、基本结论

定理 1(第一类曲线积分的性质)

(1) **无向性**　$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L(BA)} f(x,y)\mathrm{d}s$。

(2) **线性性质**　设 k 是一个常数，则

$$\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s = k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s；$$

$$\int_L [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s \pm \int_L g(x,y)\mathrm{d}s。$$

(3) **积分路径可加性** 曲线 L 分成两段 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s。$$

(4) **弧长公式** $\int_L \mathrm{d}s = \overline{L}$（$\overline{L}$表示曲线 L 的弧长）。

(5) **化简被积函数** 被积函数可用积分曲线方程化简。

(6) **奇偶性与对称性** 如果积分曲线 $L(AB)$ 关于 y 轴对称，则

$$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数}, \\ 2\int_{L(OB)} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数}, \end{cases}$$

其中 O 点是曲线弧段 $L(AB)$ 与 y 轴的交点。

同样，如果积分曲线 $L(AB)$ 关于 x 轴对称，则

$$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数}, \\ 2\int_{L(OB)} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数}, \end{cases}$$

其中 O 点是曲线弧段 $L(AB)$ 与 x 轴的交点。

(7) **轮换对称性** 若积分曲线 $L(AB)$ 关于 x 和 y 具有轮换对称性（x 和 y 互换，积分曲线 $L(AB)$ 不变），则有

$$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L(AB)} f(y,x)\mathrm{d}s \quad \text{或} \quad \int_{L(AB)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{L(AB)} f(y,x,z)\mathrm{d}s。$$

定理 2（**第二类曲线积分的性质**）

(1) **有向性** $\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{L(BA)} P(x,y)\mathrm{d}x$。

(2) **线性性质** 设 k 是一个常数，则

$$\int_L kf(x,y)\mathrm{d}x = k\int_L f(x,y)\mathrm{d}x;$$

$$\int_L [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}x = \int_L f(x,y)\mathrm{d}x \pm \int_L g(x,y)\mathrm{d}x。$$

(3) **积分路径可加性** 曲线 L 分成两段 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}x。$$

(4) **化简被积函数** 被积函数可用积分曲线方程化简。

注 在上述性质中，将 $\mathrm{d}x$ 换成 $\mathrm{d}y$，结论仍成立。

定理 3（**第一类曲线积分与第二类曲线积分的关系**）

$$\begin{aligned}\int_{L(AB)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \int_{L(AB)} \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_{L(AB)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲线 $L(AB)$ 的切向量的方向余弦，且

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \cos\beta\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}z = \cos\gamma\mathrm{d}s。$$

一般地，积分曲线切向量的方向余弦是变量。但是，当积分曲线 $L(AB)$ 是直线时，则 $L(AB)$ 切向量的方向余弦是一个常量，就是积分曲线（直线）的方向向量。

定理 4(格林公式)

设 D 是由分段光滑曲线 L 围成的有界闭区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 L 是 D 的正向边界曲线。

根据格林公式，有**面积公式**：$\overline{D}=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$。

定理 5　平面曲线积分与路径无关的等价条件

设 G 是平面单连通有界闭区域，L 是 G 内的逐段光滑曲线，若 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在 G 上具有一阶连续偏导数，则下面四个命题等价：

(1) 曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起点和终点有关；

(2) 在 G 内存在一个函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\forall (x,y)\in G$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$；

(4) 对 G 内的任意光滑或逐段光滑闭曲线 L，有$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$。

基本方法

题型 1　计算第一类曲线积分

计算第一类曲线积分有两个方法：

方法 1　将第一类曲线积分转化为定积分

(1) 平面曲线 L 的参数方程：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t;$$

(2) 平面曲线 L 的一般方程：$y=y(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x;$$

(3) 平面曲线 L 的极坐标方程：$\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta;$$

(4) 空间曲线 Γ 的参数方程：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，则

$$\int_{\Gamma(AB)} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_a^b f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t。$$

方法 2　利用性质计算第一类曲线积分

如果将曲线积分转化为定积分，由于被积函数的复杂性而没办法计算，或者很难建立积分曲线的参数方程，进而转化为定积分，此时需要考虑利用第一类曲线积分的性质：弧长公式、被积函数用曲线方程化简、奇偶性和对称性、轮换对称性等计算第一类曲线积分。这就是所谓的用性质计算第一类曲线积分方法。

例 10.1　计算 $I=\int_L x^2y^2\mathrm{d}s$，$L$：$x^2+y^2=1$ 上半圆周。

解 【方法 1】曲线的参数方程是：$x=\cos\theta, y=\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=d\theta,$$

于是有 $I=\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^4\theta)d\theta=2\left(\frac{1}{2}-\frac{3!!}{4!!}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$。

【方法 2】曲线的一般方程：$y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，则

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

于是有

$$I=\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx。$$

令 $x=\sin\theta$，则 $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^4\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}$。

例 10.2 计算 $I=\int_L y\,ds$，L：$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$的第一象限部分（双纽线）。

解 如图 10-1 所示，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则积分曲线的极坐标方程为

$$r^2=4\cos 2\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}。$$

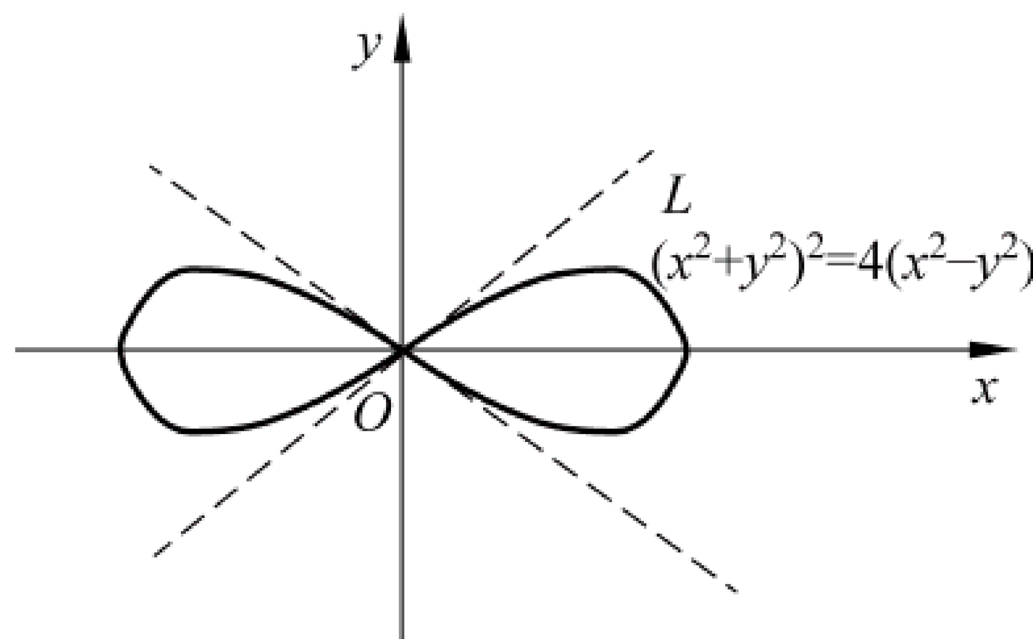


图 10-1

于是 $r=2\sqrt{\cos 2\theta}$，$r'=\dfrac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$，所以

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{2}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

并且 $y=r\sin\theta=2\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$。于是有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\frac{2}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=-4\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)。$$

例 10.3 计算 $I=\oint_L(x+y)^2ds$，其中 L：$x^2+y^2=4$。

解 根据曲线积分的线性性质，有 $I=\oint_L(x^2+y^2)ds+\oint_L 2xy\,ds$。

根据第一类曲线积分的性质(4)和性质(5)，

$$I=\oint_L(x^2+y^2)ds=\oint_L 4ds=4\bar{L}=4\cdot 2\pi\cdot 2=16\pi,$$

根据奇偶性和对称性，有$\oint_L 2xy\,ds=0$，于是 $I=\oint_L(x+y)^2ds=16\pi$。

例 10.4 计算 $I=\oint_L(x+1)^2ds$，L：$x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x+y+z=0$ 相交的圆周。

解 由于积分曲线关于 x,y,z 的具有轮换对称性，则有

$$\oint_L x\,ds=\oint_L y\,ds=\oint_L z\,ds;\quad \oint_L x^2ds=\oint_L y^2ds=\oint_L z^2ds,$$

于是，利用积分曲线方程化简被积函数，有

$$\oint_L x\,ds=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)ds=0,$$

$$\oint_L x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L 4\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\overline{L} = \frac{16}{3}\pi。$$

所以

$$I = \oint_L (x+1)^2 \mathrm{d}s = \oint_L x^2 \mathrm{d}s + 2\oint_L x\mathrm{d}s + \oint_L \mathrm{d}s = \frac{16}{3}\pi + 4\pi = \frac{28}{3}\pi。$$

计算第一类曲线积分方法综述

计算第一类曲线积分有两个方法：

方法 1 建立积分曲线方程（一般方程、参数方程、极坐标方程），再将第一类曲线积分转化为定积分；

方法 2 利用第一类曲线积分性质：弧长公式、线性性质、用积分曲线方程化简被积函数、奇偶性和对称性以及轮换对称性等，计算第一类曲线积分，这是计算第一类曲线积分常用的，也是不可忽视的一个方法。

一般情况下，计算第一类曲线积分，首先考虑将曲线积分转化为定积分，但是有时会遇到下列问题：

（1）很难建立积分曲线参数方程，特别是空间曲线；

（2）可以建立积分曲线参数方程，将曲线积分转化为定积分，但由于被积函数比较复杂，没办法计算这个定积分。

对上述情况，必须考虑可否利用或如何利用积分性质，化简、转化和计算这个曲线积分。

题型 2 计算第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

计算第二类曲线积分有三个方法：

方法 1 将第二类曲线积分转化为定积分

（1）$L(AB)$**是平面曲线**：L 的参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$，起点和终点对应的参数值分别是 α 和 β，则

$$\int_{L(AB)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t。$$

（2）$L(AB)$**是空间曲线**：L 的参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=w(t)$，起点和终点对应的参数值分别是 α 和 β，则

$$\begin{aligned}&\int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z \\ =& \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\psi'(t) + \\ & R[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\,w'(t)\}\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

方法 2 利用格林公式计算第二类曲线积分（平面曲线）

若 L 是闭合正向逐段光滑曲线，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 以及一阶偏导数在 L 围成的区域 D 内连续，则 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

方法 3 利用斯托克斯公式计算第二类曲线积分（空间曲线）

设有向分段光滑空间闭合曲线 Γ 张成分片光滑有向曲面 Σ，P，Q，R 具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中Γ方向和Σ法线方向满足右手系，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲面$\Sigma$侧方向一致的法向量的方向余弦。

注 尽管计算第二类曲线积分有三个方法，但由于格林公式只适用于平面曲线积分，斯托克斯公式只适用于空间曲线积分，所以对每类曲线积分，仅仅有两种方法。

第二类曲线积分转化为定积分，积分的下限是积分曲线的起点对应的参数取值，积分上限是积分曲线的终点对应的参数取值，所以有时可能出现下限大于上限。

例 10.5 计算$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中$L$为上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，取顺时针方向。

解 曲线L的参数方程：$x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant\pi$。因为顺时针，于是积分弧段的起点和终点对应的参数分别是$t=\pi$和$t=0$，所以

$$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_\pi^0[b^2\sin^2t(-a\sin t)+a^2\cos^2t\cdot b\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=ab^2\int_0^\pi\sin^3t\mathrm{d}t-a^2b\int_0^\pi\cos^3t\mathrm{d}t。$$

根据三角函数积分公式和性质

$$\int_0^\pi\sin^3t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{2!!}{3!!}=\frac{4}{3},\quad\int_0^\pi\cos^3t\mathrm{d}t=0。$$

于是有$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\frac{4}{3}ab^2$。

例 10.6 计算$\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中$L$是$x^2+y^2=a^2$与$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1\ (a,b>0)$的交线，曲线是逆时针方向。

解 【方法 1】曲线参数方程：$x=a\cos t, y=a\sin t, z=b(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-b(1-\cos t)](-a\sin t)+[b(1-\cos t)-a\cos t](a\cos t)+\\&\quad(a\cos t-a\sin t)b\sin t\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}[-a^2-ab+ab(\sin t+\cos t)]\mathrm{d}t\\&=-2\pi a(a+b)。\end{aligned}$$

【方法 2】利用斯托克斯公式：曲线L是$x^2+y^2=a^2$与$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$的交线构成的闭曲线张成的曲面$\Sigma$为平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$，上侧。如图 10-2 所示，法向量为$(b,0,a)$，方向余弦为$\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$。根据斯托克斯公式得到

$$\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{-2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}S=-2\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\bar{D}=-2\frac{a+b}{a}\cdot a^2\pi=-2\pi a(a+b)。$$

例 10.7　计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-y)\mathrm{d}x+(\cos y\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}y$，其中 L 从 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周。

分析　如果建立积分曲线的参数方程，将曲线积分转化为定积分，此定积分的被积函数的过于复杂，是没办法计算的，于是只能考虑应用格林公式。

解　设 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-y$，$Q(x,y)=\cos y\mathrm{e}^x+1$。如图 10-3 所示，补充一段线段 OA：$y=0$，使其成为正向闭合曲线，利用格林公式，得到

$$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-y)\mathrm{d}x+(\cos y\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}y=\oint_{L+OA}-\int_{OA}$$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^a 0\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{D}=\frac{1}{8}\pi a^2。$$

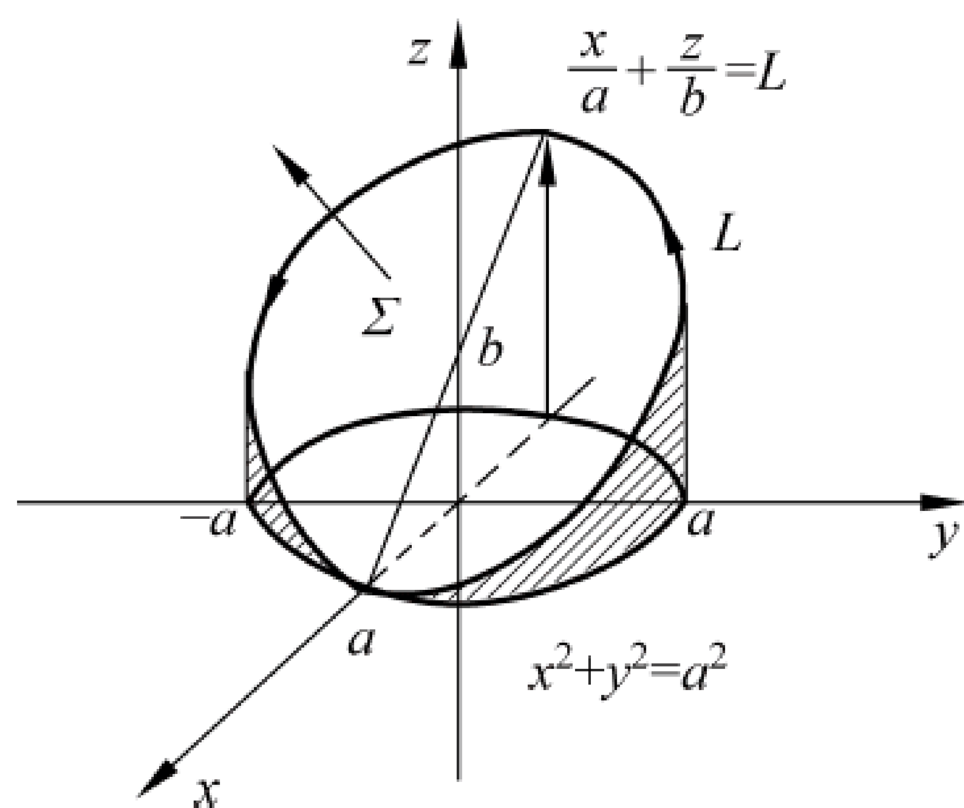


图　10-2

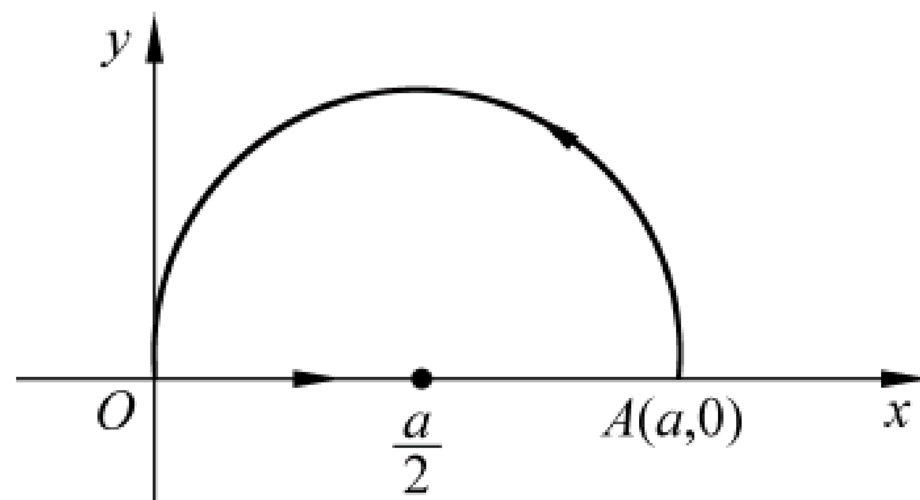


图　10-3

例 10.8　计算 $\int_L\frac{y\mathrm{d}x+(\pi a-x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}$，其中 L 从 $O(0,0)$ 沿摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 到 $A(2a\pi,0)$ 的一拱。

分析　显然转化为定积分方法是不可取的。为了应用格林公式，需要补充曲线段，但不应是 AO，因为这样的闭曲线所围成的区域包含点$(a\pi,0)$，无定义，不满足格林公式条件。于是只能补充曲线，绕开点$(a\pi,0)$，并还要有利于计算这个曲线积分，自然是

$$C:(x-\pi a)^2+\pi^2y^2=(\pi a)^2$$

上半椭圆，如图 10-4 所示，这样被积表达式分母是一个常数。

解　补充曲线 $C:(x-\pi a)^2+\pi^2y^2=(\pi a)^2$，构成负向闭合曲线，如图 10-4 所示。曲线 C 的参数方程：$x=\pi a(1+\cos\theta)$，$y=a\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。令

$$P(x,y)=\frac{y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2},\quad Q(x,y)=\frac{\pi a-x}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2},$$

于是

$$\int_L\frac{y\mathrm{d}x+(\pi a-x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}=\oint_{L+C}-\int_C=-\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{(\pi a)^2}\int_L y\mathrm{d}x+(\pi a-x)\mathrm{d}y$$

$$=0-\frac{1}{(\pi a)^2}\int_0^{\pi}[a\sin\theta(-\pi a\sin\theta)+(-\pi a\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta=1。$$

例 10.9 计算曲线积分$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，其方向与三角形的上侧满足右手法则。

分析 考虑积分曲线是在一个平面上的空间曲线，以及积分曲线是由三段曲线构成，如图 10-5 所示，如果用转化定积分的方法计算曲线积分，需要将积分曲线分成三段，比较复杂，于是应用斯托克斯公式，将其转化为曲面积分这个方法更好些。

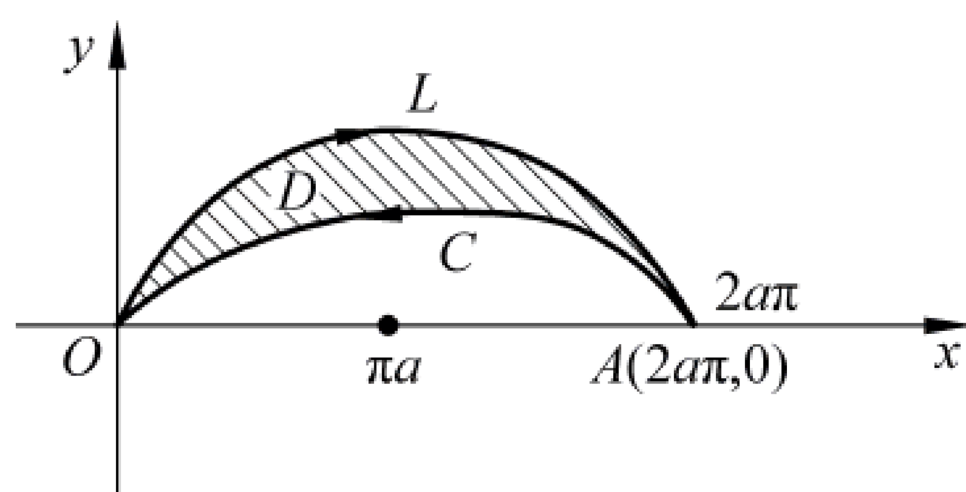


图 10-4

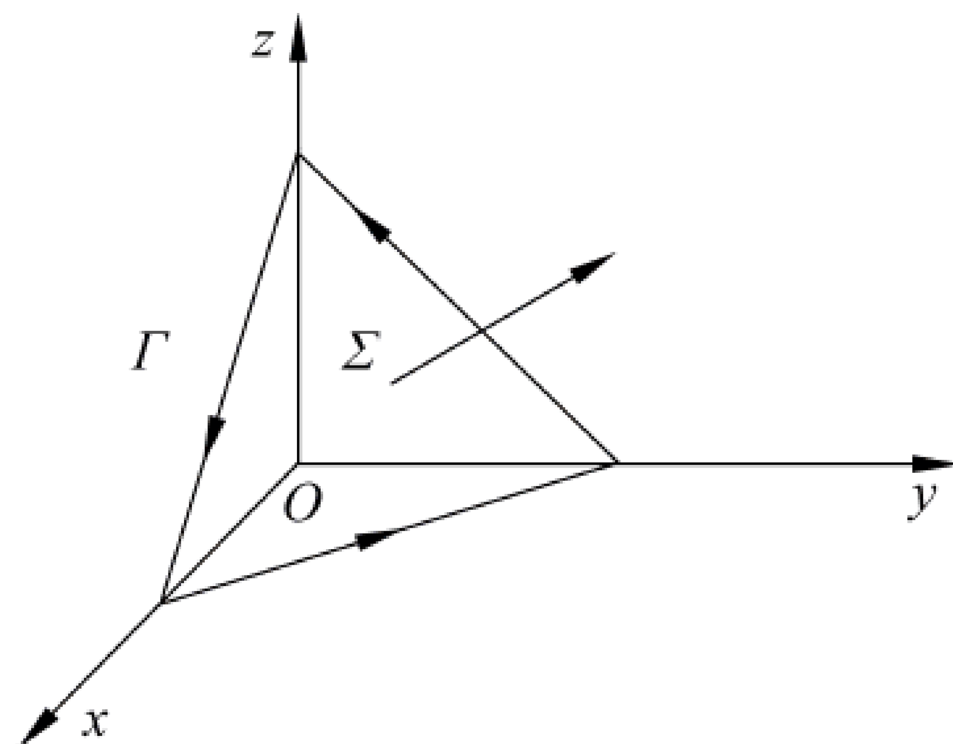


图 10-5

解 曲线 Γ 张成的曲面 Σ 是三角形，其平面方程 $x+y+z=1$。利用斯托克斯公式，得

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}：$0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1$，法向量为$(1,1,1)$，利用矢量点积法，得到

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}(1,1,1)\cdot(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}。$$

例 10.10 计算闭曲线积分$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，其中 L 为：

(1) 正向椭圆$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$； (2) 正向椭圆 $x^2+4y^2=4$。

解 (1) 设 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+4y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\neq 0。$$

由于椭圆$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ 内不包含原点，于是

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

(2) 由于 $x^2+4y^2=4$ 内包含原点，不能直接应用格林公式，于是化简被积函数得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{4}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x。$$

计算曲线积分 $\frac{1}{4}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，应用格林公式得到

$$\frac{1}{4}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi。$$

题型 3　计算与路径无关的平面曲线积分

如果一个平面曲线积分与积分路径无关，只与积分曲线 L 的起点 $A(x_0,y_0)$ 和终点 $B(x_1,y_1)$ 有关，那么曲线积分可表示为

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

计算这样的曲线积分有两个方法：

方法 1　特殊路径积分法　沿一条特殊路径(通常是平行坐标轴的折线段)计算曲线积分，即

$$\begin{aligned}\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_0)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+\\&\quad\int_{(x_1,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\mathrm{d}y。\end{aligned}$$

方法 2　分组凑微分法　求出被积表达式的原函数，即

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y),$$

于是

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\mathrm{d}u(x,y)=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)。$$

一般来说，尽管一些曲线积分与路径无关，但往往不会表明这个性质，需要检验这个积分是否与路径无关。通常是对 $\mathrm{d}x$ 系数函数的变量 y 求偏导；对 $\mathrm{d}y$ 系数函数的变量 x 求偏导，若二者相等，则表明与路径无关。

例 10.11　计算

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(\mathrm{e}^y+3x^2)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y+2y)\mathrm{d}y,$$

其中 L 是从 $A(0,0)$，$B(0,1)$，到 $C(1,2)$ 的一段圆弧。

解　【方法 1】特殊路径积分：由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^y$，于是曲线积分和积分路线无关。选择折线段，如图 10-6 所示，从 AD 到 DC 路径，D 点坐标是(1,0)。

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(\mathrm{e}^y+3x^2)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y+2y)\mathrm{d}y=\int_{AD}+\int_{DC}。$$

AD 方程：$y=0,x=x,0\leqslant x\leqslant 1$；$DC$ 方程：$x=1,y=y,0\leqslant y\leqslant 2$，于是有

$$I=\int_0^1(1+3x^2)\mathrm{d}x+\int_0^2(\mathrm{e}^y+2y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^2+5。$$

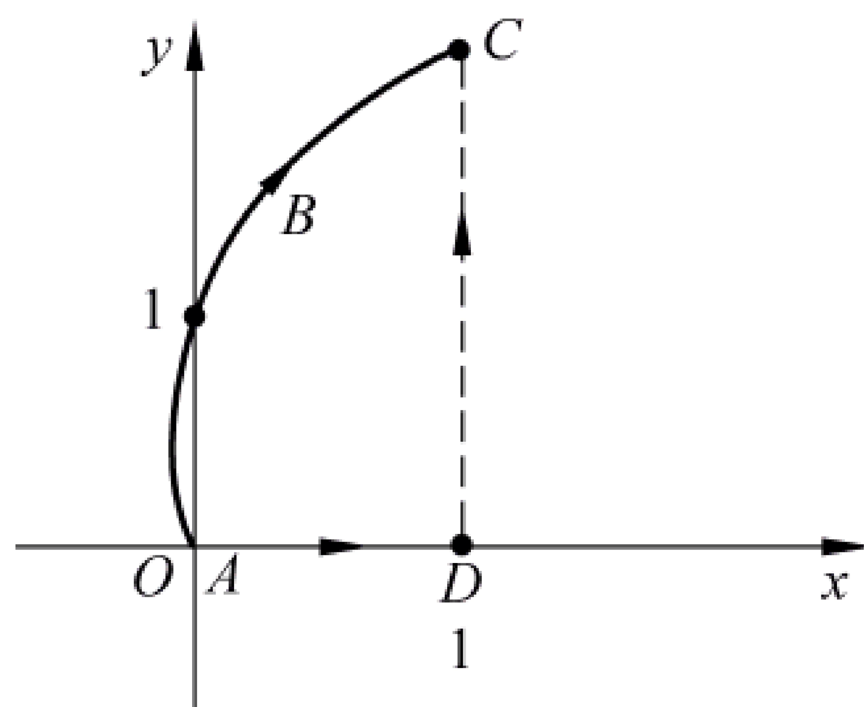


图　10-6

【方法 2】分组凑微分：利用分组凑微分方法，求出原函数

$$e^y dx + xe^y dy + 3x^2 dx + 2y dy = d(xe^y) + dx^3 + dy^2 = d(xe^y + x^3 + y^2),$$

所以原函数 $u(x,y)=xe^y+x^3+y^2$，故

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,2)} (e^y + 3x^2)dx + (xe^y + 2y)dy = u(1,2) - u(0,0) = e^2 + 5。$$

例 10.12 验证下列曲线积分在某区域与路径无关，并选择适当路径计算下列曲线积分：

(1) $\int_L x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right)$，其中 L 是从 $A\left(\frac{1}{2},2\right)$ 沿曲线 $y=\frac{1}{x}$ 到 $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 的一段有向曲线弧。

(2) $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$，其中 L 是从 $A(-1,1)$ 沿抛物线 $y=2x^2-1$ 到 $B(1,1)$ 的有向弧段。

解 (1) 令 $P(x,y)=yx^{y-1}$，$Q(x,y)=x^y\ln x$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} = \frac{\partial Q}{\partial y},\quad x>0。$$

所以在 $x>0$ 的区域上，此曲线积分与路径无关。

设 $C(2,2)$，选取路径为从 AC：$y=2\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$到 CB：$x=2\left(\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2\right)$，则有

$$\int_L x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} 2x dx + \int_{2}^{\frac{1}{2}} 2^y \ln 2 dy = \sqrt{2} - \frac{1}{4}。$$

(2) 令 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y},\quad x^2+y^2\neq 0。$$

所以在不包括(0,0)的区域上，此曲线积分与路径无关。

为了使分母变成常数，选取圆弧 $L_1: x^2+y^2=2$，如图 10-7 所示，L_1 的参数方程为 $x=\sqrt{2}\sin t, y=\sqrt{2}\cos t$，$t$ 从$\frac{3\pi}{4}$～$\frac{9\pi}{4}$，于是

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{2} dt = \frac{3}{2}\pi。$$

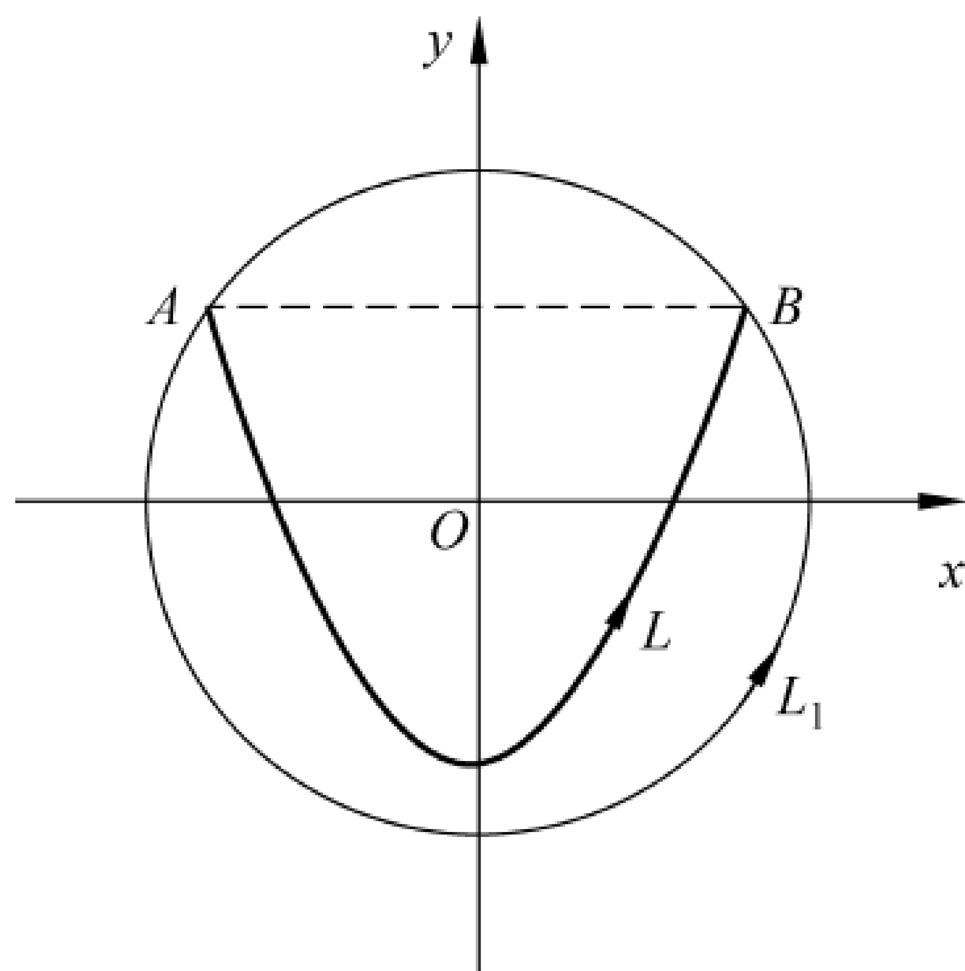


图 10-7

计算第二类曲线积分方法综述

计算第二类曲线积分，不论积分曲线是平面曲线还是空间曲线，都有两个方法：

1. 平面曲线积分

方法 1 将曲线积分转化为定积分；

方法 2 利用格林公式转化为二重积分。

对平面曲线来说：如果是闭合曲线，一般用格林公式，将其转化为二重积分；如果不是闭合曲线，可考虑建立曲线的参数方程，确定积分曲线的起点和终点对应的参数取值，将曲线积分转化为定积分。

如果曲线参数方程比较复杂，或转化为定积分，又没办法计算这个定积分，此时只能考虑格林公式，如果不是闭合曲线，可以补充曲线段，变成闭合曲线，利用格林公式。

通常情况下，补充的曲线段是平行于坐标轴的线段，这样有利于计算在补充曲线段上的曲线积分。如例10.7，但有时由于补充曲线段后构成的闭合区域要满足格林公式条件，或为了化简被积函数，只能补充曲线段，如例10.8和例10.12，此时曲线的选择一定有利于计算这个曲线积分。

另外，有的第二类闭曲线积分，是不能直接应用格林公式的，但是当将被积函数化简后(用积分曲线方程化简被积函数)，是可以应用格林公式的，如例10.10。

2. 空间曲线积分

方法1　将曲线积分转化为定积分；

方法2　利用斯托克斯公式转化为曲面积分(第一类曲面积分，或第二类曲面积分)。

对空间曲线来说，通常是建立曲线的参数方程，确定积分曲线的起点和终点对应的参数取值，将曲线积分转化为定积分。但是，如果当空间曲线 L 比较复杂时，有时很难建立曲线的参数方程，我们可以将其张成一片曲面(一般是一片平面)，将这样的第二类空间曲线积分利用斯托克斯公式转化为曲面积分，回避了建立曲线参数方程的难题。

题型4　曲线积分的等式与不等式的证明

例10.13　已知平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$，$L$ 为 D 的正向边界一周，证明：

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x}{4x^2+5y^2}\geqslant \frac{2}{5}\pi。$$

证明

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x}{4x^2+5y^2}&=\oint_L \frac{x\mathrm{e}^{\sin y}}{4x^2+5y^2}\mathrm{d}y-\frac{y\mathrm{e}^{-\sin x}}{4x^2+5y^2}\mathrm{d}x\\&=\oint_L \frac{x\mathrm{e}^{\sin y}}{4+y^2}\mathrm{d}y-\frac{y\mathrm{e}^{-\sin x}}{5-x^2}\mathrm{d}x \quad (\text{用曲线方程化简被积函数})\\&=\iint_D\left(\frac{\mathrm{e}^{\sin y}}{4+y^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}}{5-x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{应用格林公式})\\&\geqslant \frac{1}{5}\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{应用 } D \text{ 的轮换对称性})\\&=\frac{1}{5}\iint_D(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant \frac{2}{5}\overline{D}=\frac{2}{5}\pi。\end{aligned}$$

例10.14　设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 都是曲线 L 上的连续函数，证明：

(1) $\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant \bar{L}M$，$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}$，$\bar{L}$ 为积分曲线 L 的弧长；

(2) $\lim\limits_{R\to\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$。

证明　(1) 设曲线 L 的切向量的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s\\&=\int_L (P,Q)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\mathrm{d}s=\int_L \sqrt{P^2+Q^2}\cdot\cos\theta\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 θ 是向量(P,Q) 和方向余弦$(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的夹角，于是有

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \leqslant \int_L \max_{(x,y)\in L} \sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s = \max_{(x,y)\in L} \sqrt{P^2+Q^2} \cdot \bar{L} = \bar{L}M。$$

(2) 取 $P=\dfrac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}, Q=\dfrac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$，根据 $x^2+y^2=R^2$ 有

$$\sqrt{P^2+Q^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{R}{R^4\,(1-\cos\theta\sin\theta)^2} = \frac{1}{R^3\left(1-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2} \leqslant \frac{4}{R^3},$$

所以 $0 \leqslant \lim\limits_{R\to\infty} \oint_{x^2+y^2=R^2} \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2} \leqslant \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{4}{R^3} = 0$。故有

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0。$$

练习题 10-1

1. 计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接(1,0) 和(0,1) 两点的线段；

(2) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$；

(3) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 上在直线 $y=x$ 和 x 轴的第一象限内之间的一段弧；

(4) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$；

(5) $\oint_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周；

(6) $\oint_\Gamma (x^2+2y+3z)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 相交的圆周。

2. 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(0,0) 到点(2,4) 的一段弧；

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\,(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(逆时针方向绕行)；

(3) $\int_L y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=2\cos t, y=2\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧；

(4) $\int_\Gamma x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x + (x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 从(1,1,1) 到点(2,3,4) 的一条直线段。

3. 计算 $I = \int_L \dfrac{xy}{2-y^2}\mathrm{d}x$，$L$ 为曲线 $y=\sin x$ 从点(0,0) 到点$(\pi,0)$ 的弧段。

4. 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上从点(0,0) 和$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$的一段弧；

(2) $\oint_L \ln\frac{2+y}{1+x^2}dx-\frac{x(y+1)}{2+y}dy$，其中 L 为 $|x|+|y|=1$ 围成的正方形的边界，沿顺时针方向；

(3) $\oint_L \frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$，其中 L 为 $|x|+|y|=1$ 正向闭曲线；

(4) $\oint_L \frac{xy^2dx-x^2ydy}{x^2+y^2}$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 的顺时针方向。

5. 验证下列 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$：

(1) $(x+2y)dx+(2x+y)dy$；

(2) $2xydx+(x^2+1)dy$；

(3) $(1+3x^2y+2xy^2)dx+(x^3+2x^2y+e^y)dy$；

(4) $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$。

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

(1) $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$；

(2) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy$，$\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 为连续函数。

7. 利用曲线积分，计算下列曲线所围成的图形面积：

(1) $9x^2+16y^2=144$；　　(2) $x^2+y^2=4x$。

8. 已知曲线积分 $\int_L[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$ 与路径无关，且 $f(1)=1$。求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy。$$

9. 设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与积分路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$。

10. 计算 $I=\int_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(\pi,-\pi)$ 沿曲线 $y=\pi\cos x$ 到点 $B(-\pi,-\pi)$ 的一段弧。

11. 计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 是逆时针方向。

12. 计算 $I=\int_L\frac{(xe^x+5y^3x^2+x-4)dx-(3x^5+\sin y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(1,0)$ 的一段弧。

13. 设 L 为从点 $(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的上半圆周 $(x-1)^2+y^2=4, y\geqslant 0$，计算：

$$\int_L\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}。$$

14. 设 L 为圆：$(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$，取逆时针方向，$f(x)$ 是正值连续函数，试证：

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geqslant 2\pi R^2。$$

15. 设 L 为圆：$x^2+y^2+x+y=0$，取逆时针方向，试证：

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\oint_L -y\sin x^2\,dx+x\cos y^2\,dy\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

10.2 曲面积分

一、基本概念

定义 3 第一类曲面积分(对面积的曲面积分)

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k,$$

其中 $\lambda(T)$ 表示分割曲面 Σ 的分法 T 的细度，即 n 块曲面直径的最大值，(ξ_k,η_k,ζ_k) 是第 k 块曲面上的任意一点，其中 ΔS_k 是第 k 块曲面的面积。

第一类曲面积分的物理意义：物质曲面的质量。

第一类曲面积分表示物质曲面 Σ 的质量，其中被积函数 $f(x,y,z)$ 是曲面 Σ 的面密度。

定义 4 第二类曲面积分(对坐标面的曲面积分)

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dzdx+R(x,y,z)\,dxdy$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{yz}+Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{zx}+R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{xy}\right],$$

其中 $\lambda(T)$ 表示分割曲面 Σ 的分法 T 的细度，(ξ_k,η_k,ζ_k) 是第 k 块曲面上的任意一点。$(\Delta S_k)_{yz}$，$(\Delta S_k)_{zx}$，$(\Delta S_k)_{xy}$ 是 ΔS_k 分别在坐标面 yOz，zOx，xOy 上的投影。

第二类曲面积分的物理意义：单位时间流量。

第二类曲面积分表示流速场 $\mathbf{V}$ 在单位时间内流经曲面 Σ 一侧的流量，其中被积函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 是流量场 $\mathbf{V}(x,y,z)$ 在三个坐标轴方向上的分量。

二、基本结论

定理 6(第一类曲面积分性质)

(1) **线性性质** 设 k 是一个常数，则

$$\iint_{\Sigma} kf(x,y,z)\,dS=k\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS;$$

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\,dS=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS\pm\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,dS。$$

(2) **积分曲面可加性** 设曲面 Σ 分成两块曲面 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS。$$

(3) **面积公式** $\iint_{\Sigma} dS=\overline{\Sigma}$。($\overline{\Sigma}$表示曲面 Σ 的面积)

(4) **化简被积函数** 被积函数可以用积分曲面方程化简。

(5) **奇偶性与对称性** 若积分曲面 Σ 关于 xOy 坐标面对称，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{ 关于 } z \text{ 是奇函数},\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,z)\text{ 关于 } z \text{ 是偶函数},\end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 被 xOy 面分成的半部分。关于另外两种情况，请读者自己仿照写出。

(6) **轮换对称性** 若积分曲面 Σ 关于 x 和 y 具有轮换对称性(x 和 y 互换，积分曲面 Σ 不变)，则有 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(y,x,z)\mathrm{d}S$。

注 关于 x 和 z，y 和 z 的轮换对称性的定义和性质，请读者自己给出。

定理 7(第二类曲面积分性质)

(1) **有向性** 设 Σ^- 是与 Σ 有相反侧的同一光滑曲面，则

$$\iint_{\Sigma^-} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(2) **线性性质** 设 k 是一个常数，则

$$\iint_{\Sigma} kf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(3) **积分曲面可加性** 设曲面 Σ 分为两块曲面 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(4) **化简被积函数** 被积函数可以用积分曲面方程化简。

注 在上述性质中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 换成另外两类坐标 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，结论仍是正确的。

定理 8(两类曲面积分关系)

设曲面 Σ 的外法向量的方向余弦是 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S。$$

于是有 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$。

定理 9(高斯公式) 设 Σ 是分片光滑的闭曲面，P,Q,R 在 Σ 围成的闭区域 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 是整个边界曲面 Ω 的外侧。

三、基本方法

题型 5 计算第一类曲面积分(对面积的曲面积分)

计算第一类曲面积分有两个方法：

方法 1　将第一类曲面积分转化为二重积分

曲面 Σ 方程：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$ 有界闭区域，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy} 是积分曲面 Σ 在 xOy 面的投影。

类似地，曲面方程为 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 时，得到相应的公式。

方法 2　利用性质计算第一类曲面积分

利用第一类曲面积分的性质：线性性质、面积公式、用曲面方程化简被积函数、奇偶性和对称性以及轮换对称性等计算第一类曲面积分。

例 10.15　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=1$ 截出的顶部。

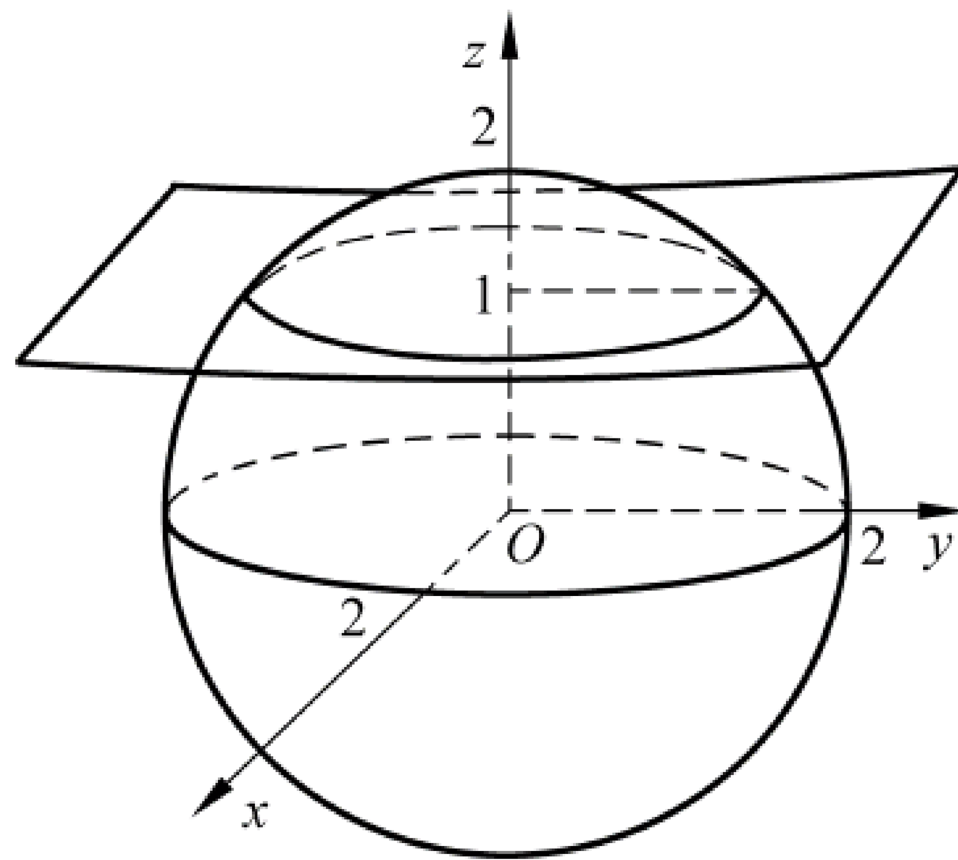


图　10-8

解　积分曲面 Σ 如图 10-8 所示，曲面方程为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，曲面 Σ 在 xOy 坐标面上的投影 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant3$。又由于

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

于是有

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{2}{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{4-r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\left[-\frac{1}{2}\ln(4-r^2)\right]_0^{\sqrt{3}}=4\pi\ln2。$$

例 10.16　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(2x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分。

解　【方法 1】转化为二重积分：曲面 Σ 的方程：$z=1-x-y$，则

$$\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}。$$

于是有

$$\iint_{\Sigma}(2x+y+z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x+1)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant1-x,0\leqslant x\leqslant1\}$。所以

$$\iint_{\Sigma}(2x+y+z)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1+x)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1(1-x)(1+x)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

【方法 2】利用曲面积分性质：由于积分曲面 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，所以有

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S。$$

于是

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\left(\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S\right) = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\bar{\Sigma}。$$

$\bar{\Sigma}$ 是积分曲面片的面积，即等腰三角形的面积：$\bar{\Sigma}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。所以

$$\iint_{\Sigma}(2x+y+z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} 2x\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S = \frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

例 10.17 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(y+z)^2\mathrm{d}S$，其中 Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由于 $\iint_{\Sigma}(y+z)^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(y^2+2yz+z^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}2yz\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$。根据曲面积分的对称性和奇偶性，有 $\iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}S=0$。又由于积分曲面关于 x,y,z 具有轮换对称性，于是 $\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$。所以

$$\iint_{\Sigma}(y+z)^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}R^2\mathrm{d}S=\frac{8}{3}\pi R^4。$$

例 10.18 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$。

解 根据积分线性性质，有

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S。$$

由于积分曲面关于 xOz 面和 yOz 面都对称，根据第一类曲面积分的对称性和奇偶性，有

$$\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=0。$$

而且

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

曲面 Σ 在 xOy 面投影为 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$，于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=\iint_{D}\sqrt{a^2+x^2+y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3。\end{aligned}$$

计算第一类曲面积分方法综述

计算第一类曲面积分，有两个方法：

1. 转化为二重积分

确定曲面 Σ 的方程：$z=z(x,y)$，以及 Σ 在 xOy 的投影 D_{xy}，计算 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$，将曲面积分表示为二重积分，即

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

当然,Σ 也可以在 yOz 坐标面,或 xOz 坐标面上投影。在哪个坐标面投影,是由曲面 Σ 方程决定的。

2. 利用第一类曲面积分的性质

对一些第一类曲面积分来说,用上述方法转化为二重积分,可能被积函数十分复杂,不利于计算,此时需要考虑利用第一类曲面积分性质:线性性质、面积公式、用曲面方程化简被积函数、奇偶性和对称性以及轮换对称性,计算第一类曲面积分。

题型 6 计算第二类曲面积分(对坐标的曲面积分)

计算第二类曲面积分有三个方法:

方法 1 投影法——将第二类曲面积分转化为二重积分

将第二类曲面积分化为二重积分

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中"±"号取决于 Σ 的侧方向与相应的坐标轴方向是相同还是相反,若相同,则取正;若相反,则取负。D_{xy},D_{yz} 和 D_{zx} 分别是曲面 Σ 在坐标面 xOy,yOz 和 zOx 上的投影。

方法 2 矢量点积法——将两类坐标或三类坐标转化为一类坐标

若积分曲面 Σ:$z=f(x,y)$,法向量为$(-f'_x,-f'_y,1)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (P,Q,R)\cdot(-f'_x,-f'_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} (P,Q,R)\cdot(-f'_x,-f'_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy} 是 Σ 在 xOy 面上的投影,"±"号取决于 Σ 的侧面与 z 轴方向是相同还是相反,若相同,则取正,若相反,则取负。

注 矢量点积法的实质可以看作面积微元的转化,即

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -f'_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}z = -f'_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

曲面的侧与坐标轴方向相同和相反的定义:如果曲面侧方向的法向量与坐标轴正向所成的角是锐角时,称为方向相同,若是钝角,称为方向相反。

方法 3 高斯公式——将第二类曲面积分转化为三重积分

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

对于闭合曲面的第二类曲面积分来说,通常用高斯公式.如果积分曲面不是闭曲面,有时需要补充曲面片,形成闭合曲面,再利用高斯公式。

需要注意的是:补充的曲面片通常是平行于坐标面的平面,这样有利于计算补充曲面片的曲面积分,而且补充的曲面应注意与原有的曲面方向的一致性,即整个闭合曲面内侧或外侧。

例 10.19 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的 $x\geqslant0, y\geqslant0$ 部分的外侧。

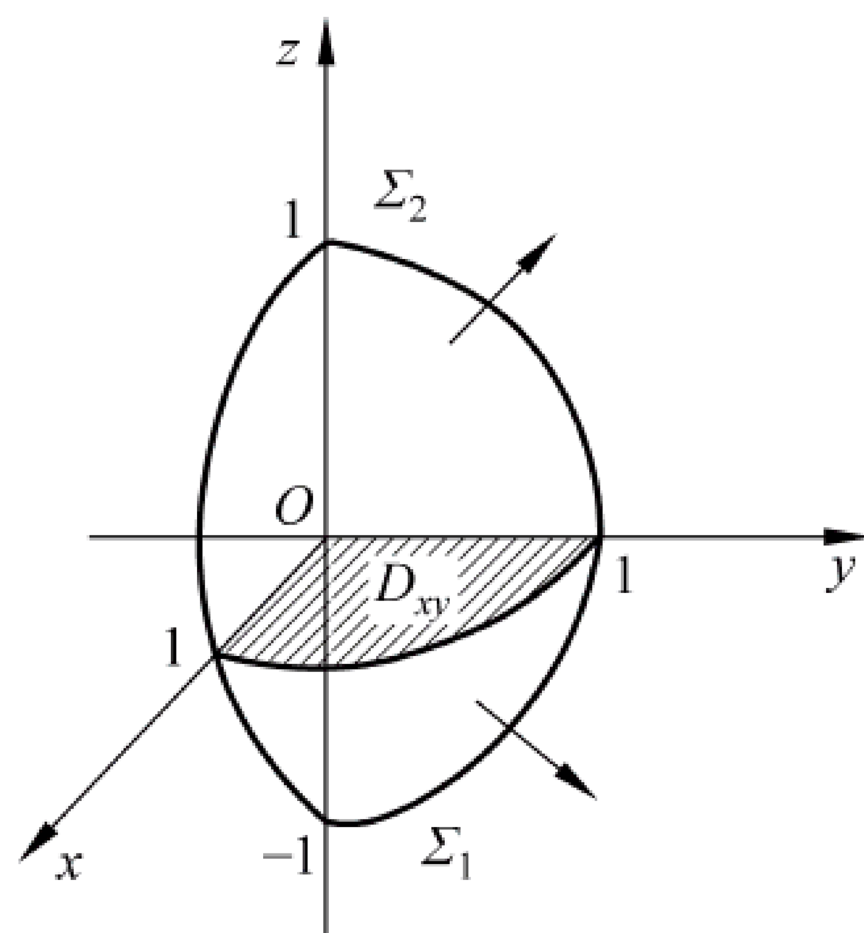


图 10-9

解 将 Σ 分成 Σ_1 与 Σ_2，Σ_1：$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，下侧；Σ_2：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，上侧。Σ_1 与 Σ_2 在 xOy 面上投影 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant1$ 的第一象限部分，如图 10-9 所示，因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ &\quad \iint\limits_{D_{xy}} xy(\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy(\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \quad (\text{令 } x=r\sin\theta, y=r\cos\theta) \\ &= \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \quad (\text{令 } r=\sin\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha\cos^2\alpha\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\alpha-\sin^5\alpha)\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{2!!}{3!!}-\frac{4!!}{5!!}\right) = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

注 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，只能往 xOy 面投影，将积分曲面 Σ 表示为：$z=f(x,y)$，被积函数的 z 用积分曲面 $z=f(x,y)$ 去替换。

例 10.20 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 $z=x^2+y^2$ 在第一卦限的 $0\leqslant z\leqslant1$ 部分的上侧。

解 【矢量点积法】积分曲面 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-z_x',-z_y',1)=(-2x,-2y,1)$，$\Sigma$ 在 xOy 面的投影：D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant1, x,y\geqslant0$，从而有

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (x,y,z)\cdot(-2x,-2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} (x,y,x^2+y^2)\cdot(-2x,-2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

注 若曲面积分中含有两类或两类以上坐标，常常用矢量点积法，当然也可以用投影法，但是需要做多次投影，这样会很麻烦，工作量也很大。

例 10.21 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解 【高斯公式】补充曲面片 Σ_1：$z=0$，下侧，使其变成闭曲面积分，闭合曲面整体外侧。

于是有

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

由于

$$\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi。$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=-\frac{3}{4}\pi,$$

所以 $I=\frac{6}{5}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{39}{20}\pi$。

注 应用高斯公式计算闭曲面积分，是计算闭曲面积分的一种常用方法，但是如果不是闭曲面，我们常常通过补充曲面片，变成闭合曲面，再应用高斯公式。

例 10.22 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

解 由于 Σ 的内部包含原点，不能用高斯公式，所以作一个小球面（挖去原点），方向向内。

$$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=R^2,\quad R<\min\{a,b,c\},$$

设 Ω 是 Σ_1 围成的区域。由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$，于是得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=0。$$

根据高斯公式

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$=0-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{1}{R^3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{R^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi。$$

例 10.23 设 $f(u)$ 具有连续的导数，计算

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的立体表面的外侧。

解 本题是闭合曲面的第二类曲面积分,满足高斯公式条件。又由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2,$$

根据高斯公式

$$I=\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{93}{5}\pi(2-\sqrt{2})。$$

计算第二类曲面积分方法综述

计算第二类曲面积分,有三个方法:

(1) **投影法**:如果第二类曲面积分仅仅含有一类坐标,如 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,可建立积分曲面方程 $z=z(x,y)$,确定曲面在 xOy 面投影 D_{xy},将第二类曲面积分转化为二重积分。

(2) **矢量点积法**:如果第二类曲面积分含有两类或三类坐标,若应用投影法,需要作两次或三次投影,计算的工作量很大,此时可考虑应用矢量点积法,转化为仅含有一类坐标的曲面积分,然后再用投影法,如例 10.20。

(3) **高斯公式**:如果积分曲面是闭合曲面,一般应用高斯公式,将曲面积分转化为三重积分;有时即使不是闭合曲面,但由于被积函数的复杂性,也可考虑补充曲面片,变成闭合曲面,再应用高斯公式。当然,补充的曲面片一般是平行坐标面的平面片,这样有利于计算在补充曲面片上的曲面积分。

有时,尽管题设给出的为闭合曲面,但由于被积函数或其偏导函数在闭曲面围成的区域上不连续,所以不能应用高斯公式,常常采用“挖洞”的方法,去掉不连续点,如例 10.22。当然如何挖洞是依据被积函数而定的,一般是坚持两个原则:一是挖洞后剩余区域是可以利用高斯公式的;二是挖洞所形成的曲面便于计算其曲面积分。

练习题 10-2

1. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成的闭合曲面;

(2) $\iint_{\Sigma}(x+2y+3z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant 0$ 的部分;

(3) $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$;

(4) $\iint_{\Sigma}(x^2+y+1)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 球面。

2. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截

得的在第一卦限内的部分的前侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y,z)$ 连续，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限内的部分的上侧；

(3) $\oint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x+y+z=1,x=0,y=0,z=0$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分的外侧。

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{y+z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分。

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 在 xOz 平面的右侧部分的外侧。

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

6. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 截得的部分的外侧。

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧。

8. 利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧；

(2) $\oint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体表面的外侧。

9. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的外侧，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$。

10. 利用斯托克斯公式计算 $I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线，从 x 轴正向看逆时针方向。

11. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}y\ln r\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\ln r\mathrm{d}z\mathrm{d}x+kz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 外侧，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$k\neq0$ 的常数。

12. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}}$，$a>0$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

上侧。

10.3　向量场的通量与散度、环流量与旋度

一、基本概念

定义 5　向量场的通量　设向量场

$$F(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

称曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为 $\boldsymbol{F}$ 沿分块光滑定向曲面 Σ 的**通量**，且有

$$\iint\limits_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是曲面 Σ 上的任意点 (x,y,z) 处的法向量。

定义 6　向量场的散度　设向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在 Ω 上有连续的一阶偏导数，$\forall(x,y,z)\in\Omega$，称偏导数的和 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 在点 (x,y,z) 的**散度**，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{F},$$

其中 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 是梯度符号。

定义 7　向量场的环流量　设向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

称闭曲线积分 $\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为 $\boldsymbol{F}$ 沿分段光滑定向闭曲线 Γ 的**环流量**，且有

$$\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是曲线 Γ 上的任意点 (x,y,z) 处的切向量。

定义 8　向量场的旋度　设向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在 Σ 上有连续的一阶偏导数，$\forall(x,y,z)\in\Sigma$，称

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{F}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 在点 (x,y,z) 的**旋度**。

二、基本结论

定理 10　通量和散度关系：设分块光滑定向曲面 Σ 围成有界闭区域 Ω，向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,$

$z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}v。$$

定理 11　环流量和旋度关系：设分段光滑定向闭曲线 Γ 张成曲面 Σ，向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 Σ 上有连续的一阶偏导数，则

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是曲面 Σ 上的法向量。如果 Σ 是一个平面，则法向量是一个常量。

注　根据定理 10 和定理 11 可知，向量场的通量与散度，环流量与旋度及其关系的实质是对曲线积分和曲面积分的两个重要公式：高斯公式和斯托克斯公式的描述和刻画。简言之，高斯公式的左端的曲面积分称之为通量，右端是散度的三重积分；斯托克斯公式的左端曲线积分称之为环流量，右端是旋度与曲线 Γ 张成曲面 Σ 上的法向量的数量积的曲面积分。

题型 7　计算通量、散度、环流量和旋度

例 10.24　设流速 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，求穿过旋转体 $x^2+y^2=z(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面的流量 Q，外侧。

解　曲面 $x^2+y^2\leqslant z(0\leqslant z\leqslant h)$ 在 xOy 面的投影是 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant h$，应用矢量点积法

$$\begin{aligned}Q&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{\Sigma}\left[x\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[x(-2x)+y(-2y)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi h^2。\end{aligned}$$

例 10.25　设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2-y)\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$，求：

(1) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的散度和旋度；

(2) 沿闭曲线 Γ 的环流量，其中 Γ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 的交线，从 z 轴正向看，Γ 是逆时针方向。

解　向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x。$$

向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-y & 4z & x^2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}。$$

向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿闭曲线 Γ 的环流量：Γ 的参数方程 $x=2\cos\theta,y=2\sin\theta,z=2$，故

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{\Gamma}(x^2-y)\mathrm{d}x+4z\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}[(4\cos^2\theta-2\sin\theta)(-2\sin\theta)+16\cos\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(-8\cos^2\theta\sin\theta+4\sin^2\theta+16\cos\theta)\mathrm{d}\theta=4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi。\end{aligned}$$

计算通量、散度、环流量和旋度方法综述

(1) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 流经曲面 Σ 一侧的流量(通量)就是 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在 Σ 的第二类曲面积分;

(2) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿闭曲线 Γ 的环流量就是 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿 Γ 的第二类曲线积分;

(3) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的散度和旋度,可以根据定义计算。

10.4 曲线积分与曲面积分的简单应用

定义 9 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,曲线 L 的线密度为 $\rho(x,y,z)$。

(1) **质量** 曲线的质量为 $M=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s$。

(2) **质心** 物质曲线的质心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{M}\left(\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\int_L y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\int_L z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s\right)。$$

(3) **转动惯量** 物体关于 x 轴,y 轴,z 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x=\int_L(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_L(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad I_o=\int_L(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s。$$

(4) **引力** 物体对质量为 m 的质点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的引力 (F_x,F_y,F_z) 为

$$F_x=Gm\int_L\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}s,$$

$$F_y=Gm\int_L\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}s,$$

$$F_z=Gm\int_L\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}s,$$

其中 G 是引力常数。

定义 10 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,曲面 Σ 的面密度为 $\rho(x,y,z)$。

(1) **质量** 曲面的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$。

(2) **质心** 物质曲面的质心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{M}\left(\iint_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\iint_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\iint_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S\right)。$$

(3) **转动惯量** 物体关于 x 轴,y 轴,z 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_y=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_o=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S。$$

(4) **引力**　物体对质量为 m 的质点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的引力 (F_x,F_y,F_z) 为

$$F_x=Gm\iint_{\Sigma}\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S,$$

$$F_y=Gm\iint_{\Sigma}\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S,$$

$$F_z=Gm\iint_{\Sigma}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{d}S,$$

其中 G 是引力常数。

注　曲线或曲面的**质心**，又称为**重心**，当密度为常量时，又是曲线或曲面的**形心**。

题型 8　计算曲线和曲面的质量、质心、形心、转动惯量和引力

例 10.26　设曲面 Σ：$x^2+y^2+z^2=2x$，它的密度为 $u(x,y,z)=(x+y+z)^2$，求曲面的质量。

解　曲面的质量

$$m=\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(2x+2xy+2yz+2xz)\mathrm{d}S。$$

由于曲面 Σ 关于 xOy 面和 zOx 面对称，所以

$$\iint_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}xz\,\mathrm{d}S=0。$$

又由于曲面 Σ 关于平面 $x=1$ 对称，所以 $\iint_{\Sigma}(x-1)\mathrm{d}S=0$，因此

$$m=\iint_{\Sigma}2x\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma}[(x-1)+1]\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=8\pi。$$

例 10.27　设 Σ 是锥面 $z=x^2+y^2$ 上被抛物柱面 $z=2ax\,(a>0)$ 所截下的部分，求其形心坐标。

解　根据对称性可知，$\bar{y}=0$，$\bar{x}=\dfrac{\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S}$，$\bar{z}=\dfrac{\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S}$。两曲面的交线在 xOy 的投影是 $x^2+y^2=2ax$，即曲面 Σ 在 xOy 面的投影 $x^2+y^2\leqslant 2ax$，所以

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi a^2。$$

$$\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\iint_{D}x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}x\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cos\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8a^3}{3}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16a^3}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16a^3}{3}\sqrt{2}\,\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\pi a^3。$$

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r = \frac{8a^3}{3}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{16a^3}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16a^3}{3}\sqrt{2}\,\frac{2!!}{3!!} = \frac{32}{9}\sqrt{2}a^3。$$

所以$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(a,0,\frac{32}{9\pi}a\right)$。

例 10.28　设曲线 L 的线密度是 $\rho=x^2+y^2+z^2$，其方程为

$$x=\mathrm{e}^t\cos t,\quad y=\mathrm{e}^t\sin t,\quad z=\sqrt{2}\mathrm{e}^t,\quad -\infty<t\leqslant 0。$$

求：(1) 曲线 L 的弧长；

(2) 曲线 L 对 Oz 轴的转动惯量 J_z；

(3) 曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力(G 为引力常数)。

解　曲线的弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，于是

(1) 曲线 L 的弧长 $s=\int_L \mathrm{d}s=\int_{-\infty}^0 2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2$。

(2) 曲线 L 对 Oz 轴的转动惯量

$$J_z=\int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^0 3\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{2t}\cdot 2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{6}{5}。$$

(3) 曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，于是

$$F_x=\int_L \frac{Gm\rho x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=\int_L \frac{Gmx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}s=\frac{2Gm}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\frac{Gm}{\sqrt{3}}。$$

同样可求得

$$F_y=\int_L \frac{Gm\rho y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=-\frac{Gm}{\sqrt{3}},\quad F_z=\int_L \frac{Gm\rho z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=\frac{2\sqrt{2}Gm}{\sqrt{3}}。$$

因此所求引力为 $\boldsymbol{F}=\frac{Gm}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\sqrt{2}\boldsymbol{k})$。

练习题 10-3,4

1. 设一流场的流速为 $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部向外流过球面的流量。

2. 求矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(2x+z)\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 通过曲面 Σ：$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$的上侧的流量。

3. 求向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$的旋度。

4. 设数量场 $u(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$。

5. 设有曲面 Σ：$x^2+y^2+z^2=2x$，它的面密度是 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求它的质量。

6. 设曲面 $2z=x^2+y^2$，其面密度为 μ，求该曲面在 $0\leqslant z\leqslant\dfrac{3}{2}$ 部分的质量和质心。

7. 已知曲面 S：$x^2+y^2-z^2=1(0\leqslant z\leqslant 1)$ 上的任意一点的密度为 $\rho=\dfrac{z}{\sqrt{1+2z^2}}$，求曲面的质心坐标和关于 z 轴的转动惯量。

8. 求密度 $\mu(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 的星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 对位于原点的单位质点的引力。

9. 设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$，求：

(1) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的散度和旋度；

(2) 沿闭曲线 Γ 的环流量，其中 Γ 是锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=0$ 的交线，从 z 轴正向看，Γ 是逆时针方向。

10.5 曲线积分和曲面积分考研真题

一、曲线积分与曲面积分考研数一真题分布、考点和解法

从 2003—2019 年的 17 年里，关于曲线积分和曲面积分的考研数一真题共出了 33 道题，是命题最多的一章，但题型较少，而且每种题型的解法也不多。具体题型分布为：

1. 计算曲线积分：共计 9 个题，分布在 2004 年，2008 年，2009 年，2010 年，2011 年，2012 年，2014 年，2015 年和 2018 年。

2. 计算曲面积分：共计 13 个题，分布在 2004 年，2005 年，2006 年，2007 年(2 题)，2008 年，2009 年，2010 年，2012 年，2014 年，2016 年和 2019 年(2 题)。

3. 证明曲线积分或曲面积分等式与不等式：共计 3 个题，分布在 2003 年，2005 年和 2006 年。

4. 曲线积分和曲面积分性质：共计 5 个题，分布在 2007 年，2013 年，2016 年，2017 年和 2019 年。

5. 计算通量、环流量、散度和旋度：共计 2 个题，分布在 2016 年和 2018 年。

6. 曲线积分和曲面积分的应用：共计 1 个题，分布在 2017 年。

1　曲线积分与曲面积分考研数一真题题型分析

1. 计算曲线积分：2004 年，2008 年，2010 年考了计算第二类平面曲线积分(建立参数方程，转化为定积分)；2009 年考了计算第一类平面曲线积分；2012 年考了补充线段，利用格林公式计算平面曲线积分；2011 年，2014 年和 2015 年考了计算第二类空间闭曲线积分，建立参数方程，转化为定积分；2018 年考了利用奇偶性和对称性计算第一类曲线积分。

2. 计算曲面积分：2005 年考了利用高斯公式，计算第二类闭合曲面积分；2004 年，2006 年，2008 年和 2014 年考了补充平面片，利用高斯公式，计算第二类曲面积分；2007 年考了利用曲面积分性质，计算第一类曲面积分；2009 年考了去掉一个小球，利用高斯公式计算第二

类曲面积分;2010 年考了建立曲面方程,计算第一类曲面积分;2012 年考了用转化为二重积分方法计算第一类曲面积分;2016 年考了利用高斯公式计算第二类闭合曲面积分;2019 年分别考了用投影法和高斯公式计算第二类曲面积分。

3. 证明曲线积分或曲面积分等式与不等式：2003 年考了证明曲线积分不等式;2005 年考了证明曲线积分等于 0;2006 年考了证明闭曲线积分等式。

4. 曲线积分与曲面积分性质：2007 年考了曲线积分性质;2013 年考了利用格林公式,转化为二重积分,比较大小;2016 年考了用与路径无关的平面曲线积分表示函数,并求最小值;2017 年考与路径无关,确定未知常数;2019 年考了利用曲线积分与路径无关,确定函数。

5. 计算通量、环流量、散度和旋度：2016 年和 2018 年考了计算旋度。

6. 曲线积分和曲面积分的应用：2017 年考了计算曲面质量。

2　曲线积分与曲面积分考研数一真题

1. (2003,五(10 分))已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界。试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$。

考点与解法：证明曲线积分等式和不等式。两个结论的证明都是利用格林公式和轮换对称性。

2. (2004,一(3)(4 分))设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,计算曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值。

考点与解法：计算第二类曲线积分。建立参数方程,转化为定积分。

3. (2004,三(17)(11 分))计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧。

考点与解法：计算第二类曲面积分。矢量点积法,或补充平面片,利用高斯公式。

4. (2005,一(4)(4 分))设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,计算 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

考点与解法：计算第二类曲面积分。利用高斯公式。

5. (2005,三(19)(12 分))设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数。

(i) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(ii) 求函数 $\varphi(y)$的表达式。

考点与解法：证明闭曲线积分等于0，求函数表达式。(i)将右半平面内的闭曲线 C 的积分表示为两个围绕原点的曲线积分的差，由闭曲线积分值为一个常数，可以证明(i)成立。(ii)利用闭曲线积分等于0，则曲线积分与路径无关，得到偏导相等，求出 $\varphi(y)$。

6. (2006，一(3)(4分))设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$的下侧，计算

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法：计算第二类曲面积分。补充平面片，利用高斯公式。

7. (2006，三(19)(12分))设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$内，函数 $f(x,y)$具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$。

考点与解法：证明闭曲线积分等于0。利用格林公式，转化为二重积分，利用已知条件，证明二重积分的被积函数等于0。

8. (2007，一(6)(4分))设曲线 L：$f(x,y)=1$($f(x,y)$具有一阶连续偏导数)，过第二象限内的点 M 和第四象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧，则下列积分小于零的是

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$；　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+\int_\Gamma f'_y(x,y)\mathrm{d}y$。

考点与解法：判断曲线积分值符号。根据曲线积分的定义和性质。

9. (2007，二(14)(4分))设曲面 Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，计算$\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$。

考点与解法：计算第一类曲面积分。拆分，利用奇偶性和对称性，以及轮换对称性。

10. (2007，三(18)(10分))计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$的上侧。

考点与解法：计算第二类曲面积分。补充平面片，利用高斯公式。

11. (2008，二(12)(4分)) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧。

考点与解法：计算第二类曲面积分。补充平面片，利用高斯公式。

12. (2008，三(16)(9分)) 计算曲线积分 $I=\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点$(0,0)$到$(\pi,0)$的一段。

考点与解法：计算第二类曲线积分。补充线段，利用格林公式。

13. (2009，二(11)(4分))已知曲线 L 是 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，计算$\int_L x\,\mathrm{d}s$。

考点与解法：计算第一类曲线积分。将第一类曲线积分转化为定积分。

14. (2009，三(19)(10 分))计算曲面积分 $I=\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。

考点与解法：计算第二类曲面积分。去掉一个小球(球心在原点，包含在椭球内)，利用高斯公式。再计算在小球面的曲面积分，化简，再用高斯公式。

15. (2010，二(11)(9 分))已知曲线 L 方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点为 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，计算曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$。

考点与解法：计算第二类曲线积分。积分曲线分成两段，建立参数方程，转化为定积分。

16. (2010，三(19)(10 分))设 P 为椭球面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在 P 点处的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分。

考点与解法：求轨迹方程，计算第一类曲面积分。利用切平面的法向量与平面 xOy 面垂直，建立等式，与曲面联立，得到轨迹曲线 C。确定积分曲面在 xOy 面的投影，将曲面积分转化为二重积分。

17. (2011，二(12)(4 分))设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴负向看去，L 为逆时针方向，计算曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}z$。

考点与解法：计算第二类空间曲线积分。建立参数方程，转化为定积分。

18. (2012，二(12)(4 分))设 Σ：$\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S$。

考点与解法：计算第一类曲面积分。将第一类曲面积分转化为二重积分。

19. (2012，三(19)(10 分))已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分

$$\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y。$$

考点与解法：计算第二类曲线积分。补充线段，利用格林公式，或建立参数方程，转化为定积分。

20. (2013，一(4)(4 分))设 L_1：$x^2+y^2=1$，L_2：$x^2+y^2=2$，L_3：$x^2+2y^2=2$，L_4：$2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记

$$I_i=\int_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\quad(i=1,2,3,4),$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

(A) I_1；　(B) I_2；　(C) I_3；　(D) I_4。

考点与解法：比较第二类曲线积分值的大小。利用格林公式，转化为二重积分，比较

大小。

21. (2014,一(12)(4分))设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去,L 为逆时针方向,计算曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z$。

考点与解法:计算第二类曲线积分。建立参数方程,转化为定积分。

22. (2014,三(18)(10分))设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma (x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法:计算第二类曲面积分。补充平面片,利用高斯公式。

23. (2015,三(18)(10分))已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2}\\ z=x\end{cases}$,起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$,计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$。

考点与解法:计算第二类空间曲线积分。建立参数方程,转化为定积分。

24. (2016,二(10)(4分))向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xyz\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

考点与解法:计算旋度。利用计算旋度的公式。

25. (2016,三(17)(10分))设 $f(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y+1$,L_t 是点$(0,0)$到点$(0,t)$的光滑曲线,计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$,并求 $I(t)$ 的最小值。

考点与解法:计算第二类平面曲线积分和求函数的最小值。求出函数 $f(x,y)$ 的表达式,验证曲线积分和路线无关,用特殊路径法求出曲线积分,求函数 $I(t)$ 的最小值。

26. (2016,三(18)(10分))设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标面围成,Σ 是 Ω 的外侧,计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma (x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法:计算第二类闭合曲面积分。利用高斯公式,转化为三重积分。

27. (2017,二(11)(4分))若曲线积分 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 内与路径无关,求 a。

考点与解法:求未知常数。根据曲线积分与路径无关的条件,建立等式,从而求出 a。

28. (2017,三(19)(10分))设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分,其上任意一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,C 是圆锥面和柱面的交线。求:(1) C 在 xOy 面的投影的曲线方程;(2) S 的质量 M。

考点与解法:求投影的曲线方程和曲面质量。从曲面方程中消去 z 得到方程与 $z=0$ 联立。根据曲面质量公式,计算第一类曲面积分。

29. (2018,二(11)(4分))设 $F(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,求 $\mathbf{rot}F(1,1,0)$。

考点与解法:求旋度。利用旋度定义,求出函数的旋度 $\mathbf{rot}F(x,y,z)$,再求 $\mathbf{rot}F(1,1,0)$。

30. (2018,二(12)(4 分))设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，求 $\oint_L xy\mathrm{d}s$。

考点与解法：求第一类曲线积分。利用曲线的对称性和被积函数的奇偶性。

31. (2019,三(17)(10 分))设 Σ 为曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法：求第二类曲面积分。补充曲面 $x=0$,变成闭合曲面,利用高斯公式。

32. (2019,一(4)(4 分))设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$,如果对上半平面内($y>0$)的任意有向光滑曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为

(A) $y-\dfrac{x^2}{y^3}$;　　(B) $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$;　　(C) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$;　　(D) $x-\dfrac{1}{y}$。

考点与解法：曲线积分与路径无关条件。利用曲线积分与路径无关的条件,偏导相等,偏导函数在区域上连续。

33. (2019,二(12)(4 分))设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z>0)$ 的上侧,计算

$$I=\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

考点与解法：求第二类曲面积分。利用投影法,将曲面积分转化为二重积分,利用奇偶性和对称性,以及极坐标变化,计算此二重积分。

10.6 本章练习题答案与提示

练习题 10-1 答案与提示

1. (1) $\sqrt{2}$。提示：曲线 L 的方程为 $x+y=1$，于是 $\int_L(x+y)\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=\bar{L}=\sqrt{2}$。

(2) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$。提示：$x'=at\cos t$, $y'=at\sin t$,于是 $\sqrt{x'^2+y'^2}=at$,故

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)t\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)。$$

(3) $\dfrac{1}{4}\pi a\mathrm{e}^a$。提示：$\int_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{e}^a\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a\cdot\bar{L}=\dfrac{1}{8}\cdot2\pi a\cdot\mathrm{e}^a=\dfrac{1}{4}\pi a\mathrm{e}^a$。

(4) $2a^2$。提示：令 $x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos t$, $y=\dfrac{a}{2}\sin t$,则 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a\sin\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\mathrm{d}t=2a^2$。

(5) $2\pi a^2$。提示：积分曲线是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 的交线,也是 $2y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 的交线；于是 $\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s=\int_\Gamma a\mathrm{d}s=2\pi a^2$。

(6) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$。提示：积分曲线关于 x,y,z 具有轮换性，于是有 $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s$ 和 $\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\int_\Gamma y\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\mathrm{d}s$,所以 $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\int_\Gamma a^2\mathrm{d}s=\dfrac{2}{3}\pi a^3$；并且

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma(x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma 0\mathrm{d}s=0。$$

2. (1) $-\frac{56}{15}$。提示：转化为定积分 $\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x=-\frac{56}{15}$。

(2) $-\frac{\pi}{2}a^3$。提示：闭曲线分成两部分，L_1：$x=a+a\cos\alpha, y=a\sin\alpha, 0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$L_2$：$y=0$，于是 $\int_{L_2}xy\mathrm{d}x=0$，并且

$$\oint_L xy\mathrm{d}x=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x+\int_{L_2}xy\mathrm{d}x=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x=-\int_0^\pi a^3(1+\cos\alpha)\sin^2\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$=-a^3\int_0^\pi\sin^2\alpha\mathrm{d}\alpha-a^3\int_0^\pi\cos\alpha\sin^2\alpha\mathrm{d}\alpha=-\frac{\pi}{2}a^3。$$

(3) 0。提示：转化为定积分 $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\sin^2t)\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2t\mathrm{d}t=0$。

(4) $12\frac{1}{2}$。提示：直线的参数方程：$x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, 0\leqslant t\leqslant1$，则

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}z=\int_0^1[2(1+t)+(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=12\frac{1}{2}。$$

3. $\frac{\pi^2}{4}$。提示：$I=\int_L\frac{xy}{2-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{2-\sin^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{2-\sin^2x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}\cos x=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{4}。$$

4. (1) $\frac{\pi^2}{4}$。提示：$P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x, Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，显然 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x$，所以此曲线积分与路径无关；利用分组凑微分，得到

$$(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2y^3-y^2\sin x+y),$$

所以 $\int_L(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=(x^2y^3-y^2\sin x+y)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)}=\frac{\pi^2}{4}$。

当然还可以采用特殊路径积分法，或根本不考虑是否与路径有关，直接添加两个线段，用格林公式。

(2) 2。提示：利用格林公式 $\oint_L\ln\frac{2+y}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{x(y+1)}{2+y}\mathrm{d}y=-\iint_D(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{D}=2$。

(3) 4。提示：$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\overline{D}$。

(4) $-\frac{\pi}{2}a^2$。提示：根据积分曲线 $x^2+y^2=a^2$，利用格林公式得到

$$\oint_L\frac{xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=-\frac{1}{a^2}\iint_D(y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}a^2。$$

5. (1) $\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$。

(2) x^2y+y。

(3) $x+x^3y+x^2y^2+\mathrm{e}^y$。

(4) $y^2\sin x+x^2\cos y$。

6. (1) 4。提示：$P(x,y)=x+y, Q(x,y)=x-y$，显然 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，所以此曲线积分与路径无关；利用分组凑微分，得到 $(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2\right)$。所以

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{(0,1)}^{(2,3)}=4。$$

(2) $\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\psi(y)\mathrm{d}y$。提示：$P(x,y)=\varphi(x), Q(x,y)=\psi(y)$，显然 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，所以此曲线积

分与路径无关。采用特殊路径积分法，沿路径$(0,0)\to(0,1)\to(1,1)$折线段，$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\psi(y)\mathrm{d}y$。

7. (1) 12π。提示：曲线的参数方程 $x=4\cos\theta,y=3\sin\theta$，则区域面积为

$$\overline{D}=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(12\cos^2\theta+12\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=12\pi。$$

(2) 4π。提示：曲线的参数方程 $x=2+2\cos\theta,y=2\sin\theta$，则区域面积为

$$\overline{D}=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4(\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=4\pi。$$

8. -1。提示：由积分和路径无关，则有

$$\begin{aligned}&\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\mathrm{e}^x+2f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y\\=&\int_{(0,0)}^{(1,0)}[\mathrm{e}^x+2f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y+\int_{(1,0)}^{(1,1)}[\mathrm{e}^x+2f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y\\=&-\int_0^1 f(1)\mathrm{d}y=-1。\end{aligned}$$

9. $\frac{1}{2}$。提示：由积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$和路径无关，则 $y\varphi'(x)=2xy$，所以 $\varphi(x)=x^2+C$，根据条件 $\varphi(0)=0$，得到 $\varphi(x)=x^2$。于是 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}$。

10. $-\frac{3}{2}\pi$。提示：由于$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，与路径无关，则

$$I=\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB},$$

（不含原点，是单连通的，如图 10-10 所示）

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-(\pi-y)}{\pi^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{\pi+x}{\pi^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{-(-\pi-y)}{\pi^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$=-\frac{3}{2}\pi$。　注：这里 $I\neq\int_{AB}$。

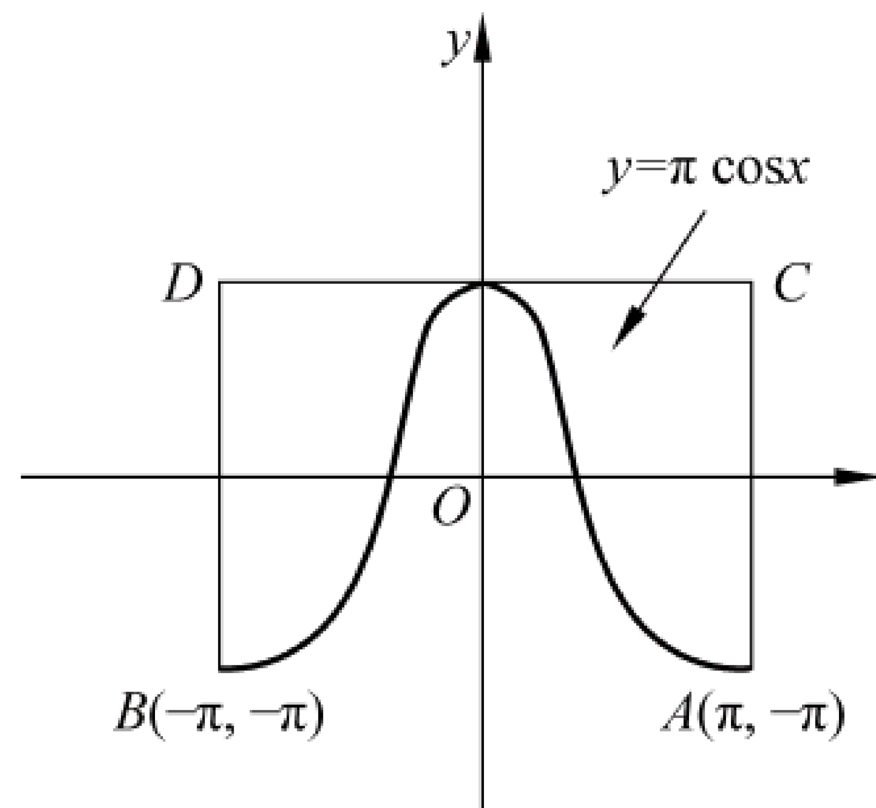


图　10-10

11. -24。提示：设 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 围成部分的上侧，D 是 S 在坐标面 xOy 上的投影，利用斯托克斯公式

$$I=\iint_S(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

利用矢量点积法，曲面的法向量为$(-z'_x,-z'_y,1)=(1,1,1)$，于是有

$$\begin{aligned}I&=\iint_D[(-2y-4z)+(-2z-6x)+(-2x-2y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24。\end{aligned}$$

12. $\frac{5}{4}\pi-8+2\mathrm{e}^{-1}$。提示：由于积分曲线满足方程 $x^2+y^2=1$，所以

$$I=\int_L(x\mathrm{e}^x+5y^3x^2+x-4)\mathrm{d}x-(3x^5+\sin y)\mathrm{d}y。$$

补充线段 BA：$y=0\ -1\leqslant x\leqslant 1$，$D$ 是上半圆，利用格林公式得到

$$\begin{aligned}I&=\int_{L+BA}-\int_{BA}=\iint_D 15(y^2+x^2)x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{AB}(x\mathrm{e}^x+5y^3x^2+x-4)\mathrm{d}x-(3x^5+\sin y)\mathrm{d}y\\&=\iint_D 15(y^2+x^2)x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^1(x\mathrm{e}^x+x-4)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi-8+2\mathrm{e}^{-1}。\end{aligned}$$

13. $-\pi+\ln 3$。提示：当$(x,y)\neq(0,0)$时，有$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，和积分路径无关，于是可选取路径 AC 到 CB，如图 10-11 所示，于是

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{AC}+\int_{CB}$$

$$=\int_\pi^0[(\cos t-\sin t)(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cos t]\mathrm{d}t+\int_1^3\frac{x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\pi+\ln 3。$$

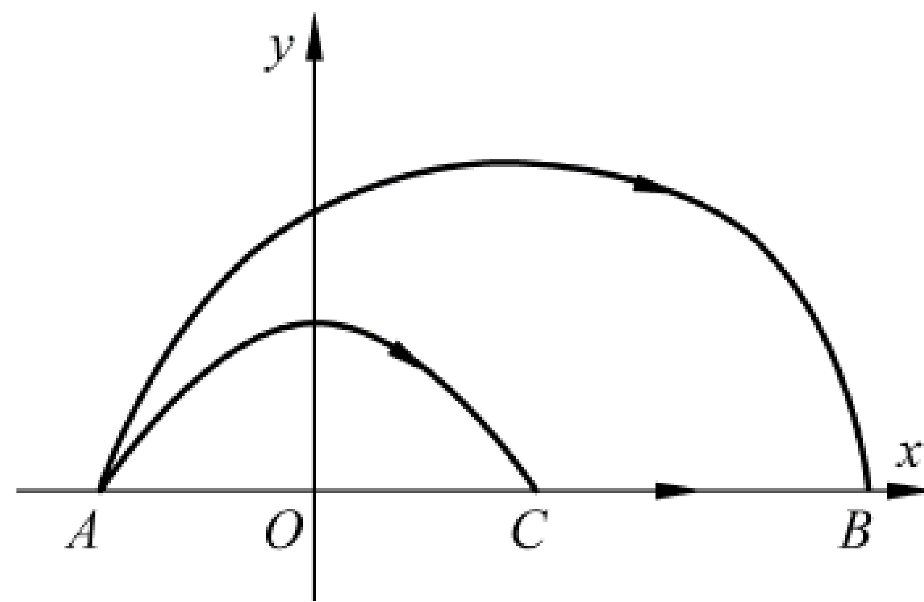


图 10-11

14. 提示：应用格林公式，根据积分区域关于 x 和 y 具有轮换对称性，有

$$\oint_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2。$$

15. 提示：应用格林公式，根据积分区域关于 x 和 y 具有轮换对称性，有

$$\oint_L -y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y=\iint_D(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\sin x^2+\cos x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$1\leqslant\sin x^2+\cos x^2=\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}。$$

练习题 10-2 答案与提示

1. (1) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\pi$。提示：$\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ_1 是锥面，Σ_2 是 $z=1$ 平面。在锥面 $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{2}$，所以 $\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1+\sqrt{2})\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\pi$。

(2) $3\pi a^3$。提示：由于积分曲面关于 xOz 和 yOz 对称，利用积分的奇偶性和对称性 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=0$。$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}}$，$\iint_\Sigma(x+2y+3z)\mathrm{d}S=\iint_D 3a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\overline{D}=3\pi a^3$。

(3) $\dfrac{4}{3}\pi$。提示：积分曲面关于 x,y,z 的轮换对称性，有 $\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma z^2\mathrm{d}S$，所以 $\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint_\Sigma\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\overline{\Sigma}=\dfrac{4}{3}\pi$。

(4) $4\pi a^2\left(\dfrac{1}{3}a^2+1\right)$。提示：由于 $\iint_\Sigma(x^2+y+1)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S+\iint_\Sigma y\mathrm{d}S+\iint_\Sigma\mathrm{d}S$，而且

$$\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{a^2}{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\frac{a^2}{3}\overline{\Sigma},\quad \iint_\Sigma y\mathrm{d}S=0,\quad \iint_\Sigma\mathrm{d}S=\overline{\Sigma}。$$

2. (1) $\dfrac{3}{2}\pi$。提示：

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_\Sigma y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0+\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\cdot\int_0^3\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\pi。$$

(2) $\frac{1}{2}$。提示：应用矢量点积法，积分曲面 $x-y+z=1$ 法向量$(1,-1,1)$，于是

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma}(f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y,f(x,y,z)+z)\cdot(1,-1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{D}_{xy}=\frac{1}{2}。$$

(3) $\frac{1}{8}$。提示：利用高斯公式

$$\oint_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z=\frac{1}{8}。$$

(4) $-\frac{\pi}{4}$。提示：$\iint_{\Sigma}yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma}(yx^3,xy^3,z^3)\cdot(-2x,-2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{D}[2yx^4+2xy^4-(x^2+y^2)^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_{D}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^7\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{4}。$$

3. $\pi\ln5$。提示：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=0+\iint_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S\quad\text{（根据对称性）}$$
$$=4\iint_{D}\frac{z}{1+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\pi\ln5。$$其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 2\}$。

4. $\frac{32}{3}\pi$。提示：矢量点积法。积分曲面的法向量$(2x,1,2z)$，则

$$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma}(yz,(x^2+z^2)y,xy)(2x,1,2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}(4xz+x^2+z^2)(4-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$=\iint_{D_{zx}}4xz(4-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{D_{zx}}(x^2+z^2)(4-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3(4-r^2)\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\pi。$$

5. $\frac{29}{20}\pi a^5$。提示：补充曲面片 Σ_1：$z=0$，下侧，成为闭合曲面，整体闭曲面外侧，第一部分积分利用高斯公式，第二部分积分用投影法，得到

$$\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-)\iint_{D_{xy}}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}x+$$
$$a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}\theta=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5。$$

6. -2π。提示：投影法。由于积分曲面 $x^2+y^2=4$ 在 xOy 面投影的面积为零，所以$\iint_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

0。积分曲面表示为 $\Sigma_1: y=+\sqrt{4-x^2}$，$\Sigma_2: y=-\sqrt{4-x^2}$，将曲面积分表示为二重积分，并利用对称区间的积分性质

$$\iint_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$=-2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z=-2\int_{-1}^{1}(2-x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=-4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=-4\cdot\frac{1}{2}\pi=-2\pi。$$

7. $2\pi a^3$。提示：补充一个曲面片 $\Sigma_1: z=0$，下侧，构成闭合曲面，整体外侧。利用高斯公式，得到

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=2\pi a^3。$$

8. (1) $4\pi R^3$。提示：$\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi R^3$；

(2) $\frac{\pi}{2}$。提示：利用高斯公式和球面坐标变换，得到

$$\oiint_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}。$$

9. π。提示：由于曲面满足方程 $x^2+y^2+z^2=4$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

补充一个曲面片 $\Sigma_1: z=0$，下侧，构成闭合曲面，整体外侧。利用高斯公式，得到

$$I=\frac{1}{4}\left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\pi。$$

10. $-\sqrt{3}\pi a^2$。提示：曲线张成的曲面 $x+y+z=0$，根据右手系，向前，并且这块曲面半径为 a 的圆面法向量为(1,1,1)，方向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，利用斯托克斯公式有

$$\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}1&1&1\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-1-1-1)\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\,\overline{\Sigma}=-\sqrt{3}\pi a^2$$

11. $\frac{4}{3}k\pi abc$。提示：作球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=R^2\,(R<\min\{a,b,c\})$，方向向内，由于 $I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=I_1-I_2$，利用高斯公式得

$$I_1=\iiint_{\Omega-\Omega_R}k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=k(\overline{\Omega}-\overline{\Omega}_R)=k\left(\frac{4}{3}\pi abc-\frac{4}{3}\pi R^3\right),$$

$$I_2=\iint_{\Sigma_1}y\ln R\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\ln R\mathrm{d}z\mathrm{d}x+kz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega_R}k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-k\frac{4}{3}\pi R^3,\quad 故\ I=\frac{4}{3}k\pi abc。$$

12. $-\frac{\pi}{2}a^3$。提示：补充圆面 $\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\leqslant a^2)$，方向向下，则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}\frac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{a}\iiint_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D}\frac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{a}\left(4a^4\pi+2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)+\pi a^3$$

$$=-\frac{1}{a}\left(4a^4\pi+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\right)+\pi a^3=-\frac{\pi}{2}a^3。$$

练习题 10-3,4 答案与提示

1. $\frac{32}{3}\pi$。提示：$Q=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma}k\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$=\iiint_{\Omega}(0+1+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\overline{\Omega}=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\frac{32}{3}\pi。$$

2. $-\frac{1}{2}\pi$。提示：$Q=\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，补充曲面片 $\Sigma_1:z=1$ 方向向下，则

$$Q=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=-\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z+\pi=-\frac{3}{2}\pi+\pi。$$

3. $\mathbf{0}$。提示：$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r}&\frac{y}{r}&\frac{z}{r}\end{vmatrix}=\left(\frac{zy}{r^3}-\frac{yz}{r^3}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{xz}{r^3}-\frac{zx}{r^3}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{yx}{r^3}-\frac{xy}{r^3}\right)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$。

4. $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$。提示：由于 $\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$，所以有

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

所以 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$。

5. 8π。提示：设 Σ_1 是 Σ 在 xOy 面的上方部分，由于 Σ 关于 xOy 面对称，于是

$$M=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,\quad \Sigma_1:z=\sqrt{2x-x^2-y^2},$$

在 xOy 的投影 $D:(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，面积微元 $\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$M=2\iint_{D}\frac{2x}{\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad 令\quad x-1=r\cos\theta,y=r\sin\theta,\quad 则\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,$$

$$M=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1+r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}r\mathrm{d}r=8\pi\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=8\pi。$$

6. $\frac{14}{5}\pi\mu,\left(0,0,\frac{29}{35}\pi\right)$。提示：$M=\iint_{\Sigma}\mu\mathrm{d}S=\mu\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14}{5}\pi\mu$。

$$\bar{x}=\bar{y}=0,\quad \bar{z}=\iint_{\Sigma}\mu z\mathrm{d}S=\frac{29}{35}\pi。$$

7. $\left(0,0,\frac{2}{3}\right),\frac{3}{2}\pi$。提示：和 yOz 对称，且密度函数与变量 x,y 无关，所以 $\bar{x}=\bar{y}=0$。由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}},$$

曲面在 xOy 面的投影为 D_{xy}：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，所以

$$M=\iint_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{1+2z^2}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}\cdot\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

$$M_z=\iint_{\Sigma}z\rho\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{z^2}{\sqrt{1+2z^2}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2-1}{\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}\cdot\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}r\sqrt{r^2-1}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi。$$

所以曲面的质心坐标 $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$。转动惯量为

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\frac{z}{\sqrt{1+2z^2}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi。$$

8. $\boldsymbol{F}=\frac{3}{5}a^2G(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$。提示：$m=1,\mu(x,y)=x^2+y^2$，

$$F_x=Gm\int_L\frac{x\mu(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=G\int_L x\mathrm{d}s=3a^2G\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}a^2G,$$

$$F_y=Gm\int_L\frac{y\mu(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}s=G\int_L y\mathrm{d}s=3a^2G\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}a^2G。$$

9. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)=1+z,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(x,y,z)=(-(6x+1)y,3y^2-1,3x^2)$，$12\pi$。提示：$\Gamma$ 的参数方程为 $x=2\cos\theta,y=2\sin\theta,z=0$，故

$$\Phi=\oint_{\Gamma}(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-4\cos\theta\sin\theta+16\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}16\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=64\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=12\pi。$$

考研真题答案

1. 略；2. $\frac{3}{2}\pi$；3. $-\pi$；4. $(2-\sqrt{2})\pi R^2$；5. $\varphi(y)=-y^2$；6. 2π；7. 略；8. B；9. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$；10. $I=\pi$；11. 4π；12. $-\frac{1}{2}\pi^2$；13. $\frac{13}{6}$；14. $I=4\pi$；15. 0；16. $C:\begin{cases}2z-y=0,\\x^2+\frac{3}{4}y^2=1\end{cases}$，$I=2\pi$；17. π；18. $\frac{\sqrt{3}}{12}$；19. $I=\frac{\pi}{2}-4$；20. D；21. π；22. -4π；23. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$；24. $(0,1,y-1)$；25. $t+\mathrm{e}^{2-t}$，3；26. $\frac{1}{2}$；27. 1；28. 64；29. $(0,1,-1)$；30. 0；31. $\frac{14}{45}\pi$；32. D；33. $\frac{32}{3}$。

* 第 11 章

向量代数与空间解析几何

基本概念

1. 向量、向量相等、向量的模、向量平行、零向量和负向量；
2. 直线方程：一般方程、对称式方程、参数方程和两点式方程；
3. 平面方程：一般方程、点法式方程、截距式方程和三点式方程；
4. 二次曲面：椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、抛物面、椭圆抛物面、双曲抛物面、锥面、椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面。

基本结论

1. 向量的加法运算法则；
2. 向量的乘法运算法则：数乘向量、两个向量的数量积、向量积和混合积运算性质；
3. 向量的位置关系；
4. 直线的位置关系；
5. 平面的位置关系；
6. 直线与平面的位置关系；
7. 点到直线距离公式；
8. 点到平面距离公式；
9. 异面直线距离公式。

基本方法

1. 向量与向量运算；
2. 直线方程和平面方程；
3. 曲面方程与投影。

11.1 向量及其运算

一、基本概念

定义 1　向量　既有大小，又有方向的量称为**向量(矢量)**。

在数学上研究的向量是可以平行移动的，与起点无关，所以向量又称**自由向量**。

定义 2 向量相等 若两个向量大小相等，方向相同(即经过平移后完全重合的向量)，称两**向量相等**。

定义 3 向量的模 向量的大小，称为向量的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$。若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

模为 1 的向量称为**单位向量**；模为零的向量称为**零向量**；零向量的方向是任意的。

定义 4 向量平行 若两个非零向量它们的方向相同或相反，则称两个**向量平行**，记 $a /\!/ b$。零向量与任何向量都平行。

定义 5 负向量 大小相等方向相反的向量，称为**负向量**，$\boldsymbol{a}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{a}$。

二、基本结论

定理 1 向量的五种运算及其运算律

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$ 是三个向量：

1. 加、减运算

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)。$$

向量的加、减法满足下列运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

2. 数乘向量运算

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$，其中 λ 是一个实数，显然

(1) $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$；

(2) $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(3) $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。

规定：$\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

3. 向量的数量积(点乘积，内积)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta,\quad \theta \text{ 为 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{b} \text{ 的夹角}，\quad \text{记为 } \theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})；$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2。$$

向量的数量积满足下列运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$。

4. 向量的向量积(叉乘积，外积)

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$ 是一个向量，其大小为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且满足右手系，称 $\boldsymbol{c}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**，具体为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}。$$

向量积满足下列运算律：

(1) 负交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；　　(2) 分配律 $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$。

向量积的模的几何意义：向量积的模等于以这两向量为邻边的平行四边形的面积。

5. 向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}。$$

混合积满足下列运算律：

(1) 轮换对称性$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；

(2) 两向量互换，混合积变号$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$。

混合积的几何意义　混合积的绝对值等于以这三向量为棱的平行六面体的体积。

注　利用混合积验证三向量在同一个平面上，是证明三向量共面的基本方法。

定理 2　设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量：$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，而且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。$$

定理 3　向量的位置关系及其结论

1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$；

2. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$；

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线(平行)充要条件存在 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

4. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$；

5. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面充要条件是存在不全为零的数 λ,μ,γ 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\quad 或\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0。$$

三、基本方法

题型 1　向量与向量运算

例 11.1　设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-1)$，求在 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面内与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直的单位向量。

解　与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都垂直的向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=(-2,3,7)$，于是所求向量与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 都垂直，因此

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 7\end{vmatrix}=(-10,-16,4)=-2(5,8,-2),$$

向量单位化,则所求向量为 $t^{\circ}=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{93}},\frac{8}{\sqrt{93}},\frac{-2}{\sqrt{93}}\right)$。

例 11.2 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

解 由已知有

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0;\quad (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,$$

于是有 $7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0$, $7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0$,解得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。所以

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\sqrt{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}}=\frac{1}{2}。$$

例 11.3 设 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$, $c=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,求 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影。

解 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2|\boldsymbol{a}|^2-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2-3\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=-1$。

例 11.4 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个非零向量,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{6}$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模。

解 由已知有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=1\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2};$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}。$$

于是有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=17+6\sqrt{3},$$

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{17+6\sqrt{3}}$。

练习题 11-1

1. 已知$\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 都是单位向量,夹角是$\frac{\pi}{3}$,求向量 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ 的夹角。

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 两两垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$,求 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模,以及它与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

3. 已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

4. 若$\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\alpha}=(6,3,-2)$,而 $|\boldsymbol{\beta}|=14$,求$\boldsymbol{\beta}$。

5. 求与坐标面 yOz 平行且垂直于向量(5,4,3)的单位向量。

6. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$ 且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积。

7. 设$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,其中 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,问:

(1) k 为何值时,$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$?

(2) k 为何值时,以$\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 为平行四边形的面积为 6?

8. 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$。

11.2　平面与直线及其方程

一、基本概念

定义 6　平面方程

(1) **平面的一般方程**　$Ax+By+Cz+D=0$,法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$。

(i) 若 $D=0$,平面通过原点。

(ii) 若 $A=0$,平面平行于 x 轴;同理 $B=0$ 或 $C=0$,平面分别平行于 y 轴或 z 轴。

(2) **平面的点法式方程**:若平面过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,则平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

(3) **平面的三点式方程**:若平面过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 和 $M_3(x_3,y_3,z_3)$,则平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0。$$

(4) **平面的截距式方程**:设 a, b 和 c 分别是平面在 x 轴, y 轴和 z 轴的截距,则平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$。

定义 7　直线方程

(1) **一般方程**　$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。\end{cases}$(两平面的交线)

直线的一般方程表示为二平面的交线,其中平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,平面 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,则直线的方向向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$。

(2) **点向式(对称式)方程**　设直线过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,则直线方程为$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$。

(3) **参数方程**　利用点向式方程,得到直线的参数方程$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt;\end{cases}$

直线的参数方程是直线的点向式方程的参数化表示。

(4) **两点式方程**　设直线过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点,则直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}。$$

二、基本结论

定理 4　平面之间、直线之间及平面和直线之间的关系

1. 平面之间的关系

设平面 π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, 平面 π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$。

(1) 平行：$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$；

(2) 垂直：$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(3) 平面间的夹角 θ：$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。

2. 直线之间的关系

设直线 l_1：$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$；直线 l_2：$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$。

(1) 平行：$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$；

(2) 垂直：$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(3) 直线间的夹角 θ：$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$。

3. 直线与平面的关系

设直线 l：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$；平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$。

(1) 平行：$l // \pi \Leftrightarrow mA+nB+pC=0$；

(2) 垂直：$l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

(3) 直线与平面的夹角 θ：$\sin\theta=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

注 两平面的夹角、两直线的夹角和直线与平面的夹角指的都是两者之间所成的锐角。

定理 5 点到平面、点到直线的距离、异面直线的距离

(1) **点到平面的距离**：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

(2) **点到直线的距离**：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ 的距离

$$d=\frac{|M_1M_0\times M_1P|}{|M_1P|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{matrix}\right\|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是直线上的点。

(3) **异面直线距离**：L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$，L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2$，二直线分别经过点 P_1 和 P_2，则异面直线的距离 $d=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$。

三、基本方法

题型 2 求直线方程和平面方程

例 11.5 化直线方程 $\begin{cases} x+2y-3z-4=0, \\ 3x-y+5z+9=0 \end{cases}$ 为对称式方程。

解　直线的方向向量

$$t=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=7\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}=7(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}),$$

在直线上取一点 $(-2,3,0)$，所以此直线的对称式方程为

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-1}。$$

例 11.6　设平面过原点和 $(6,-3,2)$ 点，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程。

解　设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$，由于平面过原点，所以 $D=0$。又由平面过点 $(6,-3,2)$，则有 $6A-3B+2C=0$；再依据所求平面与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则有 $4A-B+2C=0$，从而有 $A=B=-\frac{2}{3}C$，所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$。

例 11.7　求过点 $M(2,1,3)$，且与直线 L：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

解　过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 L 垂直的平面方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,\quad 即\quad 3x+2y-z-5=0。$$

而 L 的参数方程是：$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$，代入上述平面方程，得到参数 $t=\frac{3}{7}$，所以直线与平面的交点坐标为 $N\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$。因此过点 M 和 N 的直线方程是

$$\frac{x-2}{-\frac{12}{7}}=\frac{y-1}{\frac{6}{7}}=\frac{z-3}{-\frac{24}{7}},\quad 即\quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}。$$

例 11.8　求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程。

解　设过直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+\lambda-1=0。$$

由于该平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，则

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

解得 $\lambda=-1$，代入平面束方程中得 $y-z-1=0$，所以投影直线方程为

$$\begin{cases}y-z-1=0,\\x+y+z=0。\end{cases}$$

例 11.9　求点 $M(1,2,3)$ 关于直线 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+z=3\end{cases}$ 的对称点坐标。

解　直线的方向向量为

$$t=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}。$$

于是过 $M(1,2,3)$ 且垂直于该直线的平面方程为

$$-(x-1)+(y-2)+2(z-3)=0,$$

即 $x-y-2z+7=0$。因此平面与直线的交点 M_1 的坐标为线性方程组

$$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+z=3, \\ x-y-2z+7=0 \end{cases}$$

的解，解得 $M_1\left(\frac{1}{6},\frac{11}{6},\frac{8}{3}\right)$。设点 M 关于直线的对称点坐标为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$x_0=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{1}{6}}{-1}=-\frac{2}{3};\quad y_0=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{11}{6}}{-1}=\frac{5}{3};$$

$$z_0=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{8}{3}}{-1}=\frac{7}{3}。$$

所以点 $M(1,2,3)$ 关于直线 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+z=3 \end{cases}$ 的对称点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$。

例 11.10 证明：L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 L_2：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$ 是异面直线，并求公垂线方程和异面直线的距离。

证明 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,3)$，L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,1)$，二直线分别经过点 $P_1(0,0,0)$ 和 $P_2=(1,-1,2)$，由于

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 L_1 和 L_2 是异面直线。公垂线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 都垂直，于是

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,-1),$$

因此经过 L_1 且平行于 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$，即 $4x+y-2z=0$。经过 L_2 且平行于 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$，即 $x-z+1=0$。所以公垂线方程是

$$\begin{cases} 4x+y-2z=0, \\ x-z+1=0。 \end{cases}$$

公垂线的长为 $d=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\frac{5}{\sqrt{6}}$。

练习题 11-2

1. 求点 $M(1,1,0)$ 到平面 $2x-2y+z=3$ 的距离和投影。

2. 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $x=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离和垂足。

3. 求通过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}2x-3y+z-5=0,\\3x+y-2z-4=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

4. 求直线 L：$\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+2y-z=0$ 的投影直线方程。

5. 证明 L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 和 L_2：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 是异面直线，并求公垂线方程和异面直线间的距离。

6. 求平行于直线 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，且通过直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的平面方程。

7. 求通过直线 $\begin{cases}3x-2y+2=0,\\x-2y-z+6=0\end{cases}$ 且与点 $(1,2,1)$ 的距离为 1 的平面方程。

8. 确定 λ，使直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 和 $x+1=y-1=z$ 相交。

9. 求直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{6}$ 与平面 $10x+2y-11z=7$ 的夹角。

10. 一直线与二直线 $\begin{cases}x=3z-1,\\y=2z-3\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y=2x-5,\\z=7x+2\end{cases}$ 垂直且相交，求此直线方程。

11. 求点 $P(1,-2,3)$ 关于平面 $x+4y+z-14=0$ 的对称点。

12. 求过平行直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 和直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程。

11.3　曲面及其方程

一、基本概念

定义 8　旋转曲面方程　平面曲线 C 绕该平面上一定直线旋转而成的曲面称为旋转曲面，定直线称为旋转曲面的轴，曲线 C 称为旋转曲面的母线。

求平面曲线绕坐标轴旋转的曲面方程：

平面曲线 $f(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转，x 不变，而 y 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替，则旋转曲面方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；同样，平面曲线 $f(x,y)=0$ 绕 y 轴旋转，y 不变，而变量 x 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替，则旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$。

关于平面曲线 $f(y,z)=0$ 和 $f(x,z)=0$ 绕坐标轴的旋转曲面方程与上述类似。

定义 9　柱面　平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面，其中定曲线 C 称为曲面的准线；动直线 L 称为曲面的母线。

注　对二次曲面方程来说，若缺少一个变量，该曲面一定是柱面，其母线平行于缺少的变量那个轴。例如 $x^2+y^2=1$ 就是一个柱面，又称圆柱面，母线平行于 z 轴。

定义 10　空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线，故空间曲线方程写为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0。\end{cases}$

将曲线 C 上的动点的坐标表示为参数 t 的函数，空间曲线的参数方程为$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t)。\end{cases}$

定义 11　空间曲线在坐标面上的投影：

设空间曲线 C 的一般方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$消去其中一个变量，不妨设 z，得到方程 $H(x,y)=0$ 就是曲线 C 在 xOy 面上的投影，此投影曲线方程为$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0。\end{cases}$

注　若投影曲线写成 $H(x,y)=0$，此时是柱面方程，而不是投影曲线方程，仅与 $z=0$ 联立时，才表示投影曲线，是柱面与平面的交线。至于曲线在其他坐标面上的投影，方法类似。

定义 12　二次曲面　三元二次方程表示的曲面叫做**二次曲面**。常见的二次曲面有

(1) **椭球面方程**　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

(2) **双曲面方程**　(i) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；(ii) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

(3) **抛物面方程**　(i) 椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；(ii) 双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$。

(4) **锥面方程**　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$。

(5) **柱面方程**　(i) 椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；(ii) 双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；(iii) 抛物柱面$\frac{x^2}{a^2}=y$。

二、基本方法

题型 3　求旋转曲面方程与投影

例 11.11　求曲线$\begin{cases}(x+2)^2-z^2=4,\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}$在 yOz 平面上的投影。

解　为了求曲线在 yOz 面上的投影，需要设法消去曲线中的变量 x，为此两方程作差得到 $x=\frac{1}{8}(y^2+z^2)$，将其代入第一个方程中，得到 $\frac{1}{64}(y^2+z^2+16)^2-z^2=4$，整理得到

$$(y^2+z^2)^2+32(y^2-z^2)=0,$$

所以投影曲线方程为

$$\begin{cases}(y^2+z^2)^2+32(y^2-z^2)=0,\\x=0。\end{cases}$$

例 11.12　直线$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面方程。

解　曲面上任取点 $P(x,y,z)$，过 P 点作平面垂直于 x 轴，该平面与直线的交点 $Q(x,y_0,z_0)$，与 x 轴的交点 $M(x,0,0)$，则有 $|PM|=|QM|$，即

$$y^2+z^2=y_0^2+z_0^2。$$

由于点 $Q(x,y_0,z_0)$ 在直线上，所以有 $\frac{x}{2}=\frac{y_0-1}{1}=\frac{z_0+1}{1}$，从而有

$$y_0=1+\frac{x}{2},\quad z_0=-1+\frac{x}{2},$$

所以旋转曲面方程是

$$y^2+z^2=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\left(-1+\frac{x}{2}\right)^2,\quad 即\quad x^2-2y^2-2z^2=-4。$$

例 11.13　曲线 L 是抛物柱面 $x=2y^2$ 与平面 $x+z=1$ 的交线,求:

(1) 曲线 L 在各个坐标面上的投影;

(2) 曲线 L 分别绕各个坐标轴旋转一周的旋转曲面方程。

解　(1) 曲线 L 在 xOy 面的投影为 $\begin{cases}x=2y^2,\\z=0。\end{cases}$ 曲线 L 在 xOz 面的投影为 $\begin{cases}x+z=1,\\y=0。\end{cases}$ 曲线 L 在 yOz 面的投影为 $\begin{cases}2y^2+z=1,\\x=0。\end{cases}$

(2) 曲线 L 以 x 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=x,\\y=\sqrt{\dfrac{x}{2}},x\geqslant 0,\\z=1-x,\end{cases}$ 则曲线 L 绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为 $y^2+z^2=\frac{1}{2}x+(1-x)^2$。

曲线 L 以 y 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=2y^2,\\y=y,\qquad -\infty<y<+\infty,\\z=1-2y^2,\end{cases}$ 则曲线 L 绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为 $x^2+z^2=4y^4+(1-2y^2)^2$。

曲线 L 以 z 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=1-z,\\y=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-z)},1\leqslant z,\\z=z,\end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}(1-z)+(1-z)^2$。

例 11.14　设 P 为椭球面 S: $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 上的点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹方程。

解　椭球面 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 上的动点 $P(x,y,z)$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y-z,2z-y)。$$

由于 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,xOy 面的法向量 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,于是

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=(2x,2y-z,2z-y)\cdot(0,0,1)=2z-y=0。$$

由于 P 点在椭球面上,故所求的 P 点应满足

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz-1=0,\\2z-y=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1,\\2z-y=0。\end{cases}\quad(它是圆柱面与平面的交线)$$

练习题 11-3

1. 指出下列曲面名称，且画出草图：

(1) $x^2+2y^2+3z^2=1$；(2) $x^2+y^2-z^2=1$；

(3) $x^2-y^2-z^2=1$；　(4) $x^2+y^2-z=0$；

(5) $x^2+z^2+z=0$；　(6) $x^2+y^2-z^2=0$。

2. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴：

(1) $z=x^2+y^2$；　(2) $4x^2+y^2+4z^2=1$；

(3) $x^2+y^2-z^2=1$；　(4) $x^2-y^2-z^2=1$。

3. 求曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=z\end{cases}$ 在各坐标平面的投影曲线方程。

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2+z^2=4z$ 的交线在 xOy 面上的投影。

5. 写出下列曲线绕指定轴旋转的旋转曲面方程：

(1) $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 x 轴旋转；

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转；

(3) $y^2=4z$ 分别绕对称轴和过顶点的切线旋转；

(4) 直线 $3x-2y+4=0$ 绕 y 轴旋转。

6. 设直线 L：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=z+1$，平面 π：$x-y+2z=1$。

(1) 求直线 L 在平面 π 上的投影；

(2) 直线 L 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程。

11.4 向量代数与空间解析几何考研真题

从 2003—2019 年的 17 年里，关于向量代数与空间解析几何部分的考研真题有 5 道题，单独命题的仅有 1 道题：

1. (2006，一(4)(3 分))求点(2,1,0)到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离。

其他 4 个题，出现在数一的重积分和曲面积分真题中，求旋转曲面方程和轨迹方程：

2. (2009，三(17)(11 分))椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是由过点(4,0)且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成：

(i) 求 S_1 和 S_2 方程；　　(ii) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

3. (2010，三(19)(10 分))设 P 为椭球面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在 P 点处的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分。

4. (2013，三(19)(10 分))设直线 L 过点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一

周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω。

(i) 求曲面 Σ 方程； (ii) 求 Ω 的形心坐标。

5. (2017，三(19)(10 分))设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任意一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，C 是圆锥面和柱面的交线，求：

(i) C 在 xOy 面的投影的曲线方程； (ii) S 的质量 M。

向量代数部分是没有命题的，而解析几何部分只有 5 题，但所占比重非常小，问题也比较简单，重点是旋转曲面方程，曲面或曲线的投影。

11.5 本章练习题答案与提示

练习题 11-1 答案与提示

1. $\frac{2}{3}\pi$。提示：由于 $(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot(-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})=-6|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{7}{2}$，$|2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=4|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2+4|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\frac{\pi}{3}=7$，$|-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}|^2=9|\boldsymbol{\alpha}|^2+4|\boldsymbol{\beta}|^2-12|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=7$。$\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot(-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})}{|2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||-3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}|}=-\frac{1}{2}$，于是 $\theta=\frac{2}{3}\pi$。

2. $\sqrt{14}$，$\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}$。提示：$|\boldsymbol{S}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=14$，所以 $|\boldsymbol{S}|=\sqrt{14}$。于是 $\cos(\widehat{\boldsymbol{S},\boldsymbol{b}})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{2\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$。

3. $\frac{\pi}{3}$。提示：$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，解得 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}。$$

4. $\pm(12,6-4)$。提示：和 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行的单位向量为 $\pm\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}(6,3,-2)=\pm\frac{1}{7}(6,3,-2)$，所以

$$\boldsymbol{\beta}=14\cdot\pm\frac{1}{7}(6,3,-2)=\pm(12,6,-4)。$$

5. $\pm\left(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$。提示：设此向量为 $(0,y,z)$，根据已知条件有 $(5,4,3)\cdot(0,y,z)=4y+3z=0$；且 $y^2+z^2=1$，解得 $y=\pm\frac{3}{5}$，$z=\mp\frac{4}{5}$。

6. 30。提示：$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{3}=6$，所以 $S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=30$。

7. $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2k|\boldsymbol{a}|^2+(2+k)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2k+4=0$，于是 $k=-2$。

$$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(2-k)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}=2,$$

于是有 $2|2-k|=6$，解得 $k=-1$ 或 $k=5$。

8. 由于 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，在由 $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 得到 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。

练习题 11-2 答案与提示

1. 提示：过点 $M(1,1,0)$ 与平面 $2x-2y+z=3$ 垂直的直线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$，此直线与平面交点即投影坐标为 $\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，距离 $d=1$。

2. 提示：过点 $M(1,2,3)$ 和直线 $x=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 垂直的平面方程为 $x-3y-2z+11=0$. 平面和直线的交点坐标即垂足为 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},2\right)$，于是点到直线的距离 $d=\sqrt{\frac{3}{2}}$。

3. $5(x-1)+7(y-2)+11(z+1)=0$。提示：直线的方向向量为

$$\boldsymbol{t}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=(5,7,11),$$

所求平面方程为 $5(x-1)+7(y-2)+11(z+1)=0$。

4. $\begin{cases}3x-y+z-1=0,\\ x+2y-z=0。\end{cases}$ 提示：过直线 $\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 的平面束为 $2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0$，即 $(2+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z+\lambda-1=0$，此平面与平面 $x+2y-z=0$ 垂直，则

$$[(2+\lambda),(\lambda-1),(1-\lambda)]\cdot(1,2,-1)=0,\quad \lambda=\frac{1}{4}。$$

于是垂直平面方程为 $3x-y+z-1=0$，所以投影直线方程为 $\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\ x+y-z+1=0。\end{cases}$

5. $\frac{7}{\sqrt{6}}$。提示：证明：直线上各取一点，分别为 $P_2(3,0,1)$ 和 $P_1=(-1,2,0)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(4,-2,1)$，二直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,0)$，$\boldsymbol{s}_2=(1,0,1)$，于是

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=4-1+4=7\neq 0,$$

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-1),$$

所以三向量不共面，即二直线是异面直线，并且 $d=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\frac{7}{\sqrt{6}}$。

6. $x+z-3y+2=0$。提示：过直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 的平面束为 $x+z-4+\lambda(y-2)=0$，即 $x+z+\lambda y-2\lambda-4=0$，此平面与直线平行，则有 $(1,1,\lambda)\cdot(2,1,1)=0$，解得 $\lambda=-3$，所以求直线方程 $x+z-3y+2=0$。

7. $x+2y+2z-10=0$ 和 $4y-3z-16=0$。提示：过直线的平面束为

$$3x-2y+2+\lambda(x-2y-z+6)=0,\quad 即\quad (3+\lambda)x-2(\lambda+1)y-\lambda z+2+6\lambda=0,$$

所以点 $(1,2,1)$ 到平面的距离为 $d=\frac{|(3+\lambda)-4(\lambda+1)-\lambda+2+6\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+4(\lambda+1)^2+\lambda^2}}=\frac{|2\lambda+1|}{\sqrt{6\lambda^2+14\lambda+13}}=1$，解得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$。代入平面束方程中，得到所求平面。

8. $\lambda=\frac{5}{4}$。提示：二直线的方向向量分别是 $(1,2,\lambda)$ 和 $(1,1,1)$，在二直线取两点 $(1,-1,1)$ 和 $(-1,1,0)$，两点组成的向量是 $(2,-2,1)$，二直线相交当且仅当三向量共面，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5-4\lambda = 0,\quad \lambda = \frac{5}{4}。$$

9. $\arccos\frac{8}{21}$。提示：直线的方向向量 $\boldsymbol{t}=(2,3,6)$，平面的方向向量 $\boldsymbol{n}=(10,2,11)$，所以直线和平面的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{t}||\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{21}$，所以 $\theta=\arccos\frac{8}{21}$。

10. $\begin{cases} x-3z+1=0, \\ 37x+20y-11z+122=0。\end{cases}$ 提示 L_1：$\begin{cases} x=3z-1, \\ y=2z-3 \end{cases}$ 的对称式方程为 $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$，直线 L_2：$\begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2 \end{cases}$ 的对称式方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-2}{7}$，与二直线垂直的方向向量为

$$\boldsymbol{t} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (12,-20,4) = 4(3,-5,1),$$

所以经过 L_1 并且平行于 $\boldsymbol{t}$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $x-3z+1=0$. 经过 L_2 并且平行于 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y+5 & z-2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $37x+20y-11z+122=0$。所以公垂线方程是

$$\begin{cases} x-3z+1=0, \\ 37x+20y-11z+122=0。\end{cases}$$

11. $(3,6,5)$。提示：过点 $P(1,-2,3)$ 且垂直于 $x+4y+z-14=0$ 的直线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{1}$，直线与平面的交点 $(2,2,4)$，于是对称点的坐标 (x_0,y_0,z_0) 分别为

$$x_0=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot 2}{-1}=3;\quad y_0=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}=\frac{-2+(-2)\cdot 2}{-1}=6;$$

$$z_0=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}=\frac{3+(-2)\cdot 4}{-1}=5。$$

即对称点坐标为 $(3,6,5)$。

12. $x+2y-2z-1=0$. 在二直线上取两点 $(3,0,1)$ 和 $(-1,1,0)$，两点组成的向量为 $(4,-1,1)$，于是所求平面上任意一点 (x,y,z) 满足

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad 即\quad x+2y-2z-1=0。$$

练习题 11-3 答案与提示

1. (1) 椭球面；(2) 单叶双曲面；(3) 双叶双曲面(马鞍面) (4) 旋转抛物面；(5) 圆柱面；(6) 圆锥面。

2. (1) 母线 $\begin{cases} z=x^2, \\ y=0 \end{cases}$ 旋转轴是 z 轴；(2) 母线 $\begin{cases} 4x^2+y^2=0, \\ z=0 \end{cases}$ 旋转轴是 y 轴；(3) 母线 $\begin{cases} x^2-z^2=1, \\ y=0 \end{cases}$ 旋转

轴是 z 轴；(4) 母线 $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 旋转轴是 y 轴。

3. 在 xOy 面 $\begin{cases} x^2+2y^2=4, \\ z=0; \end{cases}$ 在 xOz 面 $\begin{cases} x^2+2z^2=4, \\ y=0; \end{cases}$ 在 yOz 面 $\begin{cases} y=z, \\ x=0。 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ z=0。 \end{cases}$ 提示：消去变量 z. 两曲线的交线满足 $4z=4$，即 $z=1$，于是有 $x^2+y^2=3$。在 xOy 面上的投影曲线是 $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ z=0。 \end{cases}$

5. (1) $(x-2)^2+y^2+z^2=1$；(2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1, \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$；

(3) $x^2+y^2=4z; y^4=16(x^2+z^2)$；(4) $4(y-2)^2=9(x^2+z^2)$。

6. (1) $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0; \end{cases}$ (2) $x^2-2y^2+z^2=2$。

考研真题答案

考研真题答案略。